

高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编 陶平生 冯跃峰 边红平

ZHOUQIHANSHU HE ZHOUQISHULIE

周期函数和周期数列

李世杰 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座.周期函数和周期数列/李世杰主编. —杭州：浙江大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-308-06101-8

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 097182 号

高中数学竞赛专题讲座(周期函数和周期数列)

李世杰 主编

责任编辑 黄娟琴
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571-88925592，88273066(传真)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 杭州浙大同力教育彩印有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 9.25
字 数 191 千
版 印 次 2008 年 7 月第 1 版 2008 年 9 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-06101-8
定 价 15.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

丛书编委会

编写说明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来，反响强烈，深受广大读者喜爱，并收到了大量反馈信息。很多读者，包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见，希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求，我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共8种：《图论方法》、《周期函数与周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》；考虑到配套，把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。



目　录



第一讲　函数的周期性

1　周期函数的定义

知识扫描

Ⅰ．定义

对于函数$f(x)$，如果存在一个非零常数T，使得当x取定义域内的每一个值时，都有$f(x+T)=f(x)$，那么函数$f(x)$叫做周期函数，非零常数T叫做这个函数的周期.

对于一个周期函数$f(x)$，如果在它所有的周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就叫做$f(x)$的最小正周期.

Ⅱ．周期函数的性质与特征

对于周期函数，要了解它的如下一些性质：

(1) 周期函数的定义域D至少是一端无界的点集，它可以是连续的，也可以是间断的，甚至可以是离散的无界点集.

由$f(x+T)=f(x)$可得出：若$x\in D$，则也有$x+nT\in D(n\in \mathbf{N})$，说明$D$至少一端是无界的. 而函数：

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=2n,\\ 2, & x=2n-1,\end{cases}(x\in \mathbf{N}^*),$$

容易证明它是周期函数，最小正周期为2，其定义域为正整数集. 说明周期函数的定义域



不一定向正负两端同时无限延伸，可以一端有界.

显然，定义域为两端有界的函数，如 $y=\sin x, x\in[-8\pi,6\pi]$ 不是周期函数.

(2) 周期函数值域中的每一个元素，必定无限次被取到，所以任何严格的单调函数都不是周期函数.

(3) 周期函数的周期有无数多个.

若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 $nT(n\in\mathbf{N}, n\geqslant 1)$ 均为 $f(x)$ 的周期. 因为由 $f(x+T)=f(x)$ 可推出 $f(x+nT)=f(x)$.

但 $nT(n\in\mathbf{Z}, n\neq 0)$ 未必是 $f(x)$ 的周期，即周期函数不一定同时有正负周期. 如函数 $f(x)=\sin(\sqrt{x})^2$，$2\pi, 4\pi, \cdots$，都是它的周期，但 -2π 不是此函数的周期.

事实上，当 $x=0$ 时，$x+(-2\pi)=-2\pi<0$，不在此函数的定义域 $[0,+\infty)$ 内，所以 $f[x+(-2\pi)]$ 无意义.

(4) 最小正周期 T 首先是一个周期，另外还满足：若 T' 是任一正周期，则有 $0<T\leqslant T'$.

但周期函数不一定有最小正周期. 如常数函数 $f(x)=1$，全体正实数都是它的正周期，但无最小正周期. 因为全体正实数没有最小数. 函数 $f(x)=\cos(\sqrt{-x})^2$ 只有负周期 $-2k\pi, k\in\mathbf{N}$，没有正周期.

(5) 若 $f(x)$ 是周期函数，则其绝对值函数 $|f(x)|$ 一定是周期函数，但其逆命题不真. 如函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x\leqslant 2\pi\\ 1, & x<-\pi \text{ 或 } x>2\pi\end{cases}$，容易证明 $|f(x)|$ 是周期函数，但 $f(x)$ 不是周期函数.

(6) 若 T_1, T_2 是周期函数 $f(x)$ 的两个周期，人们通常认为 T_1/T_2 是整数或有理数，但实际上 T_1/T_2 可能等于任何非零实数.

例：$g(x)=2008, x\in(0,0.5)\cup[1,+\infty)$，用周期函数的定义，不难证明，$g(x)$ 的所有周期的集合 $T\in[1,+\infty)$，取 T_2 等于 1，则 $T_1/T_2\in[1,+\infty)$.

(7) 图像重复出现的函数不一定是周期函数.

如：函数 $y=x-[x](x\in[-3,3])$ 的图像重复出现，但它不是周期函数.

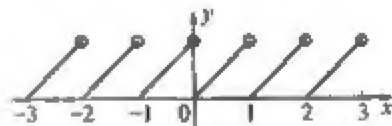


图 1-1-1

(8) 高中课本中的周期函数的定义是广义的，因为从整体上看，这样的周期函数的图像并不一定是周而复始的.

如：函数 $f(x)=\frac{1}{2}, x\in A$，其中

$$A=\sum_{n=1}\left(\left[-n,-n+\frac{1}{n+1}\right]\cup\left[(n-1),(n-1)+\frac{n}{n+1}\right]\right).$$



因为任取 $x\in\left[-n,-n+\frac{1}{n+1}\right](n\in\mathbf{N}^*)$,

有 $-(n-1)\leqslant x+1\leqslant-(n-1)+\frac{1}{n+1}<-(n-1)+\frac{1}{(n-1)+1}$,

所以 $x+1\in\left[-(n-1),-(n-1)+\frac{1}{(n-1)+1}\right]\subset A$,则 $f(x+1)=\frac{1}{2}$.

又因为任取 $x\in\left[(n-1),(n-1)+\frac{n}{n+1}\right](n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $n\leqslant x+1\leqslant n+\frac{n}{n+1}<n+\frac{n+1}{(n+1)+1}$,

故 $x+1\in\left[n,n+\frac{n+1}{n+2}\right]\subset A$,则 $f(x+1)=\frac{1}{2}$.

可见,对于任意 $x\in A$,总有 $f(x+1)=f(x)=\frac{1}{2}$.

所以该函数是周期函数且有周期 $T=1$,虽然它的函数值按照一定规律重复出现,可是它的图像从整体上看并不重复出现.

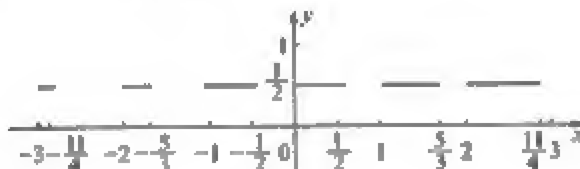


图 1-1-2

不仅如此,像著名的狄利克雷函数 $f(x)=\begin{cases}1,(\text{当 } x \text{ 为有理数时})\\0,(\text{当 } x \text{ 为无理数时})\end{cases}$,它的周期是非零的任何有理数,可是它的图像却无法画出.

可见,对于满足 $f(x+T)=f(x)$ 的周期函数 $f(x)$,一个必要条件是函数值必须单向周期性地无限多次重复出现.因此在能够画出函数图像的前提下,周期函数的这一必要条件等价于周期函数的图像($T<0$ 时向左,$T>0$ 时向右)单向周期性地无限多次重复出现.这说明周期函数的图像重复出现是有方向性的、局部的,从整体上看并不一定是周而复始的.

如图 1-1-2 中的函数 $f(x)$,它的最小正周期为 $T=1$,它在 $(0,0.5)$ 内的图像,沿 x 轴正方向在区间 $(1,1.5)$,$(2,2.5)$,$(3,3.5)$,…中不断地重复出现;它在 $\left(1,\frac{5}{3}\right)$ 内的图像,沿 x 轴正方向在区间 $\left(2,2\frac{5}{3}\right)$,$\left(3,3\frac{5}{3}\right)$,…中不断地重复出现……



一般地，设周期函数$f(x)$的定义域为D，一个周期为T，则对任意$x\in D$，有$x+T\in D$，$f(x+T)=f(x)$，所以

(1) 若$f(x)$只有正周期，则$f(x)$的图像沿x轴正方向无限多次重复出现；

(2) 若$f(x)$只有负周期，则$f(x)$的图像沿x轴负方向无限多次重复出现；

(3) 若$f(x)$同时有正、负周期，则$f(x)$的图像沿x轴正、负方向无限多次重复出现.

只有在第三种情况下，周期函数的整体性质是它在任一周期内的性质进行周期延拓的结果，这时研究函数的性态，可局限在某一周期内讨论. 作它的图像，也只要作出它在某一个周期内的图像，然后向左、右按周期平移就可得到函数的整个图像，这是我们要研究的理想的周期函数. 前面两种情况下的周期函数，需要增加一定的条件，才能达到这一理想的层次水平.

下面我们只研究在高考和数学竞赛中出现的理想的周期函数. 反映在函数图像上，每过一个周期必定重复出现. 因此，作这种周期函数的图像，只要作出一个周期内的图像，再利用周期性向左右平移扩展，就得到整个定义域内的图像.

Ⅱ. 函数周期性的判定

(1) 若函数$f(x)$的最小正周期为T'，则$f(ax+b)(a\neq 0)$的最小正周期为$\frac{T'}{|a|}$.

(2) 周期函数$f(x)$与$g(x)$定义于同一集合D上，T_1、T_2分别为其正周期，若$\frac{T_1}{T_2}$为有理数，则$f(x)+g(x)$、$f(x)g(x)$、$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$也为周期函数.

特别地，设$f_1(x)$的一个周期为$T_1=pa$，$f_2(x)$的一个周期为$T_2=qa$，p、q为正整数且$(p,q)=1$，a为正实数. 则pqa是函数$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$的一个周期.

证明　因为$f(x+pqa)=f_1(x+pqa)+f_2(x+pqa)=f_1(x+qT_1)+f_2(x+pT_2)=f_1(x)+f_2(x)=f(x)$，所以$pqa$是$f(x)$的一个周期.

注：如果T_1、T_2分别是$f_1(x)$、$f_2(x)$的最小正周期，且对于任何$0<\beta<pqa$，$f_2(x+\beta)\neq f_2(x)$或$f_1(x+\beta)\neq f_1(x)$，则pqa也是$f_1(x)+f_2(x)$的最小正周期.

(3) 若$y=f(x)$在定义域A上保号(恒非负或恒非正)，且$y=f^{\alpha}(x)$(α为非零有理数)也在A上保号，则$y=f(x)$与$y=f^{\alpha}(x)$在A上有相同的周期.

这是因为，对任意的x_1、$x_2\in A$，若$f(x_1)=f(x_2)$，则有$f^{\alpha}(x_1)=f^{\alpha}(x_2)$，若有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则有$f^{\alpha}(x_1)\neq f^{\alpha}(x_2)$，因而有相同的周期.

(4) 若$f(x)$是周期函数，则复合函数$\phi[f(x)]$仍为周期函数. 但周期可能不相同，如$f(x)=\sin x$与$y=|\sin x|$的最小正周期分别为2π和π. 特别地，当$\phi(x)$确定的对应关系是一一映射时，周期相同.



Ⅳ. 非周期函数的证明方法

(1) 根据周期函数图像的性质.

(2) 根据周期函数的定义,用特例否定法.

(3) 一般情况下用反证法.

Ⅴ. 周期变换

函数 $y=\sin\omega x$,$x\in\mathbf{R}$(其中 $\omega>0$ 且 $\omega\neq1$)的图像,可以看作把正弦曲线 $y=\sin x$ 的图像上所有的点的横坐标缩短(当 $\omega>1$ 时)或伸长(当 $0<\omega<1$ 时)到原来的$\frac{1}{\omega}$倍(纵坐标不变)而得到.



例题分析

例 1 判定函数$f(x)=x-[x]$,$x\in\mathbf{R}$(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数)的周期性,并作出其图像.

解 如图 1-1-3,我们作出$f(x)$的图像.

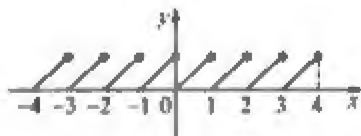


图 1-1-3

由$f(x)$的图像可知,当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(x)=x-[x]$是周期函数,且 $T=1$ 是它的一个正周期.事实上,对 $x\in\mathbf{R}$,有

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1$$
$$=x-[x]=f(x).$$

说明 实际上 $T=1$ 是$f(x)$的最小正周期.我们可用反证法加以证明:若 $l(0<l<1)$是$f(x)$的一个周期,则对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有:

$$f(x+l)=f(x).$$

令 $x=0$,得 $f(l)=f(0)=0$.与 $f(l)=l-[l]=l\neq0$ 矛盾.所以任意的 $l(0<l<1)$不是$f(x)$的正周期.

例 2 证明:函数$f(x)=|\sin x|+|\cos x|$的一个周期是$\frac{\pi}{2}$,并求函数$f(x)$的值域.

证明 显然,函数$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$.

所以函数$f(x)=|\sin x|+|\cos x|$的一个周期是$\frac{\pi}{2}$.



当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值域为 $[1,\sqrt{2}]$.

因此由函数的周期性，知 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域为 $[1,\sqrt{2}]$.

说明　求函数的周期，也可通过图像观察而得到. 如本例由

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right),\\ -\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right),\\ -\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & x\in\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi\right),\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

容易作出它的图像如下：

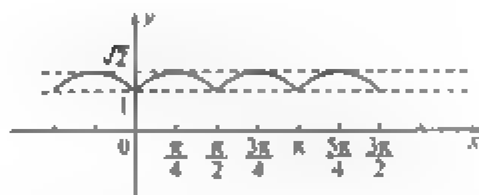


图 1-1-4

所以函数 $f(x)$ 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期.

例 3　设函数 $y=10\tan\left[(2k-1)\frac{x}{5}\right]$ $(k\in\mathbf{Z}^{*})$，当 x 在任意两个连续整数间(包括整数本身)变化时，至少有两次失去意义，求 k 的最小正整数值.

解　根据题意，最小正周期应满足下列条件

$T\leqslant1$，即 $\dfrac{\pi}{\frac{1}{5}(2k-1)}\leqslant1$，

即　$k\geqslant\frac{5\pi+1}{2}$，又因为 $k\in\mathbf{Z}^{*}$，所以 $k\geqslant9$ 即可.

解答错了！错在哪里？

剖析　这一解法，忽略了函数 $y=10\tan\left[(2k-1)\frac{x}{5}\right]$ 过原点，且为奇函数，要满足 x



在任意两个连续整数间(包括整数本身)变化时,至少有两次失去意义,首先就必须满足 $x\in[0,1]$ 范围内两次失去意义. 下面给出正确解答

正解 由题意可知,最小正周期 T 满足

$$\frac{3}{2}T\leqslant 1,$$

则有

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{\frac{2k-1}{5}}\leqslant 1,$$

解得 $k\geqslant 13$,故 k 的最小正整数值为 13.

说明 正确使用性质,准确理解题意,是正确解题的关键.

例 4 已知正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<2\pi)$ 的图像与 y 轴交于点 $(0,1)$,在同一个周期内一个最高点的坐标是 $(2,\sqrt{2})$,求函数的表达式.

解 因为点 $(2,\sqrt{2})$ 是最高点,所以 $A=\sqrt{2}$,由点 $(0,1)$ 在曲线上得 $\sqrt{2}\sin\varphi=1$,因为 $0<\varphi<2\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 或 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时,将点 $(2,\sqrt{2})$ 的坐标代入表达式 $y=\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$ 中,得 $\sin\left(2\omega+\frac{\pi}{4}\right)=1$,从而有 $2\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,即 $\omega=k\pi+\frac{\pi}{8}$.

因为点 $(0,1)$,$(2,\sqrt{2})$ 是曲线上同一个周期内的两个点,所以最小正周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{k\pi+\frac{\pi}{8}}>2,$$

解之得 $-\frac{1}{8}<k<\frac{7}{8}$,因 $k\in\mathbf{Z}$,故 $k=0$,$\omega=\frac{\pi}{8}$. 此时,函数表达式为:$y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

当 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ 时,将点 $(2,\sqrt{2})$ 的坐标代入表达式 $y=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{3\pi}{4}\right)$ 中,得 $\sin\left(2\omega+\frac{3\pi}{4}\right)=1$,从而有 $2\omega+\frac{3\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$\omega=k\pi-\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $T>2$,$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{k\pi-\frac{\pi}{8}}>2$,解之得 $\frac{1}{8}<k<\frac{9}{8}$,又 $k\in\mathbf{Z}$,故 $k=1$,$\omega=\frac{7\pi}{8}$,此时,函数表达式为:$y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

综上,符合条件的函数表达式为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$ 或 $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)$.



说明 由正弦型曲线上的点求函数 $y=A\cdot\sin(\omega x+\varphi)$的表达式，关键在确定 ω,φ 的值，这往往是一件比较麻烦的事。从本例可见，若能恰当地利用周期概念，这个问题不难解决。一般地，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是正弦型曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$上的任意两点。当 A,B 在同一个周期内时，由周期概念可知，周期 $T\geqslant|x_1-x_2|$，当 A,B 同在 $\frac{k}{n}(n,k\in\mathbf{N}^*)$个周期内时，$\frac{k}{n}\cdot T\geqslant|x_1-x_2|$；当 A,B 同在 $\frac{k}{n}$ 个周期外时，$\frac{k}{n}\cdot T<|x_1-x_2|$。上面求解中，就是利用这一简单事实，准确方便地根据曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$上的点坐标求出了它的函数表达式。

例 5 (第 10 届 IMO 试题)实数 $a>0$，$y=f(x)$是定义在全体实数集 $\mathbf{R}$ 上的实值函数，对每一个实数 x，有

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}。\tag{①}$$

(Ⅰ)证明：$y=f(x)$是周期函数；(Ⅱ)当 $a=1$ 时，给出一个非常数的$f(x)$的例子。

解 (Ⅰ)**证法 1**(代换法)

将①移项后两边平方，得

$$\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2=f(x)-[f(x)]^2=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-f(x)\right]^2,$$

即 $$\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{4}。\tag{②}$$

在②中用 $x+a$ 替换 x 后得

$$\left[f(x+2a)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{4}，\tag{③}$$

③－②得

$$\left[f(x+2a)-\frac{1}{2}\right]^2=\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2。\tag{④}$$

但据①知，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$，于是，由④得到

$$f(x+2a)=f(x)，$$

此式表明$f(x)$是以 $2a$ 为周期的周期函数。

证法 2(解方程法)

由 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$，　①

用 $x+a$ 替换 x，得 $f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}$　②



将①整理成关于$f(x)$的方程得

$$[f(x)]^2-f(x)+\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2=0,$$

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left\{1\pm\sqrt{1-4\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{1\pm2\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}\right\}\\&=\frac{1}{2}\pm\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}.\end{aligned}$$

注意到$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$，故上式取+号，即

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}. \qquad ③$$

比较②与③知$f(x+2a)=f(x)$，这表明$f(x)$是周期函数，$2a$是它的一个周期.

证法3（复合函数法）

对实数$x+a$，我们有

$$f[(x+a)+a]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2}.$$

由x的任意性，$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$，把$f(x+a)$的式子代入$f[(x+a)+a]$的表达式，得

$$\begin{aligned}f[(x+a)+a]&=f(x+2a)\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-\left\{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}\right\}^2}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{2}-f(x)\right]^2}\\&=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-f(x)\right|.\end{aligned}$$

由于

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)+[f(x-a)]^2}\geqslant\frac{1}{2},$$

故

$$\left|\frac{1}{2}-f(x)\right|=f(x)-\frac{1}{2},$$



于是，$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x)$.

这表明，$f(x)$是以 $2a$ 为周期的周期函数.

(Ⅱ) 当 $a=1$ 时，可以举出

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right).$$

容易验证 $f(x)$ 满足要求. 事实上，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\frac{1}{2}\left[1+\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)\cdot[1-f(x)]}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)\cdot\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)\right]}\\&=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)\\&=f(x+1)\end{aligned}$$

可见，$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)$满足

$$f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}.$$

例 6 已知点集 $\{(x,y)\mid y=(-1)^k\sqrt{1-(x-2k)^2},2k-1\leqslant x\leqslant 2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 画出这个集合的图形；

(2) 视(1)的图形为函数 $y=f(x)$的图像. 证明：

$$f(x+4)=f(x),f(x+2)+f(x)=0.$$

解 (1)记 $I_k=[2k-1,2k+1]$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 k 为偶数时，点集为 x 轴上方的一连串的半圆；当 k 为奇数时，点集为 x 轴下方的一连串半圆. 上述两系列半圆的端点在 x 轴上并衔接而形成连续曲线，如图 1-5所示

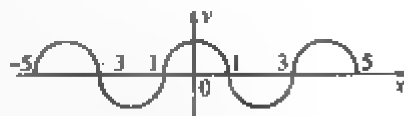


图1-5



(2) 由于 $f(x)=(-1)^k\sqrt{1-(x-2k)^2}$，$2k-1\leqslant x\leqslant 2k+1$，故有

$$2(k+2)-1\leqslant x+4\leqslant 2(k+2)+1,$$
$$2(k+1)-1\leqslant x+2\leqslant 2(k+1)+1.$$

所以

$$f(x+4)=(-1)^{k+2}\sqrt{1-[(x+4)-2(k+2)]^2}=(-1)^k\sqrt{1-(x-2k)^2}=f(x),$$
$$f(x+2)=(-1)^{k+1}\sqrt{1-[(x+2)-2(k+1)]^2}=(-1)(-1)^k\sqrt{1-(x-2k)^2}=-f(x).$$

即
$$f(x+2)+f(x)=0.$$

注 根据定义说明 $f(x)$ 是周期函数，4 是它的一个周期.

例 7 证明函数 $f(x)=\sin x+\sin ax$（a 为无理数）不是周期函数

证明 $\sin x$ 与 $\sin ax$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，其中 a 为无理数，但 $\sin x+\sin ax$ 不是周期函数. 事实上，若 $\sin x+\sin ax$ 是一个周期为 $T(\neq 0)$ 的周期函数，则对于任意实数 x 成立：

$$\sin(x+2T)+\sin(ax+2aT)=\sin x+\sin ax,$$

从而有 $\sin(x+2T)-\sin x=-[\sin(ax+2aT)-\sin ax]$，和差化积，得

$$\cos(x+T)\sin T=-\cos(ax+aT)\sin aT，\cos x\sin T=-\cos ax\sin aT.$$

取 $x=\frac{\pi}{2}$，则最后一个方程的左边等于零，于是 $\sin aT=0$，故 aT 是 π 的倍数；取 $ax=\frac{\pi}{2}$，此方程右边等于零，于是 $\sin T=0$，即 T 是 π 的倍数，因 a 是无理数，这是不可能的，从而产生矛盾.

说明 (1) 类似例 7 证法可以证明函数 $\varphi(x)=x\cos x$ 不是周期函数

利用例 7 结论，可得

(2) 两个非周期函数的和函数，可能是周期函数.

如：非周期函数 $f(x)=\sin x+\sin ax$，$g(x)=\sin x-\sin ax$（a 为无理数），而 $f(x)+g(x)=2\sin x$ 是周期函数.

(3) 一个周期函数与一个非周期函数的和函数，也可能是周期函数.

如：$f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x$ 是非周期函数，$g(x)=-\sin x$ 是周期函数，而 $f(x)+g(x)=\sin\sqrt{2}x$ 是周期函数.

例 8 (1) 证明 $f(x)=\sin|x|$ 不是周期函数.

(2) 证明 $y=\sin\sqrt{x}$ 不是周期函数.



(1) **证法1** (图像法)因为

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (x\geqslant 0),\\ -\sin x & (x\leqslant 0).\end{cases}$$

所以 $y=f(x)$ 的图像如图1-1-6所示.

由图像知，它在$[-\pi,\pi]$上的部分不可能由任何长度为2π的区间上的图像平移而得到，故$f(x)$不是周期函数.

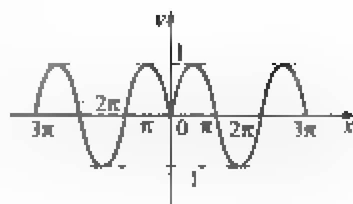


图1-1-6

证法2(特例否定法)

假设$f(x)$是周期函数，那么存在一个正数T，使得对任意$x\in\mathbf{R}$有$\sin|x+T|=\sin|x|$.

取$x=\frac{\pi}{2}$，得$\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=1$，$T+\frac{\pi}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，即$T=2n\pi(n\in\mathbf{N}^*)$.

又$x=-\frac{\pi}{2}$时，$f\left(-\frac{\pi}{2}+T\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-1$，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，即$f\left(-\frac{\pi}{2}+T\right)\neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

故不存在$T\neq 0$，对一切$x\in\mathbf{R}$有$\sin|x+T|=\sin|x|$，即$f(x)=\sin|x|$不是周期函数.

(2) 若$y=\sin\sqrt[3]{x}$是周期函数，$T\neq 0$是其一个周期，则有$\sin\sqrt[3]{x+T}=\sin\sqrt[3]{x}$，对于$x\in\mathbf{R}$都成立.

令$x=0$，得 $\sin\sqrt[3]{T}=0$

所以 $\sqrt[3]{T}=k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq 0)$. ①

令$x=T$，得 $\sin\sqrt[3]{2T}=0$.

所以 $\sqrt[3]{2T}=n\pi(n\in\mathbf{Z},n\neq 0)$. ②

②除以①得$\sqrt[3]{2}=\frac{n}{k}$，这与$\sqrt[3]{2}$是无理数矛盾，故$y=\sin\sqrt[3]{x}$不是周期函数.

说明 ① 用反证法还可证明函数$y=\tan|x|$，$y=\cot|x|$都不是周期函数，但$y=\cos|x|$是周期函数，由于$\cos|x|=\cos x$，易知它的最小正周期为2π.

② 一般地，在三角型函数$f(x)=\tan[\varphi(x)]$的定义域A上，若$\varphi(x)$可导且$\varphi'(x)$不是周期函数，则$f(x)$不是周期函数.

证明 假设$f(x)$是A上一个周期为T(T是非零常数)的函数，则对于任何$x\in A$，都有$x+T\in A$，且

$$\tan[\varphi(x+T)]=\tan[\varphi(x)].$$ ①



两边关于 x 求导，得

$$\frac{\varphi'(x+T)}{\cos^2[\varphi(x+T)]}=\frac{\varphi'(x)}{\cos^2[\varphi(x)]}.\qquad ②$$

由 ① 式得

$$\cos^2[\varphi(x+T)]=\cos^2[\varphi(x)]\neq 0.$$

因此 $\varphi'(x+T)=\varphi'(x)$，从而 $\varphi'(x)$ 在 A 上是周期函数，这与已知相矛盾，故假设不成立，命题得证.

③ 在三角型函数 $f(x)=\cos[\varphi(x)]$ 的定义域 A 上，若 $\varphi(x)$ 的导函数 $\varphi'(x)$ 连续，并且 $\varphi'(x)$ 不是周期函数，则 $f(x)$ 不是周期函数.

证明 假设 $f(x)$ 是 A 上周期为 T 的函数，则对于任何 $x\in A$，都有 $x+T\in A$，且

$$\cos[\varphi(x+T)]=\cos[\varphi(x)].\qquad ③$$

两边关于 x 求导，得

$$\varphi'(x+T)\sin[\varphi(x+T)]=\varphi'(x)\sin[\varphi(x)],$$

故

$$|\varphi'(x+T)|\cdot|\sin[\varphi(x+T)]|=|\varphi'(x)|\cdot|\sin[\varphi(x)]|.\qquad ④$$

设 x_0 是 A 内的任意一个值，下面就 $\varphi(x_0)$ 值的两种情形分别证明

$$|\varphi'(x_0+T)|=|\varphi'(x_0)|.$$

第一种情形：$\varphi(x_0)\neq\pi$ 的整数倍. 此时，因 $\cos[\varphi(x_0+T)]=\cos[\varphi(x_0)]\neq\pm 1$，有 $|\sin[\varphi(x_0+T)]|=|\sin[\varphi(x_0)]|\neq 0$，故由 ④ 式得到 $|\varphi'(x_0+T)|=|\varphi'(x_0)|$.

第二种情形：$\varphi(x_0)=\pi$ 的整数倍. 此时由 ③ 式知 $\varphi(x_0+T)=\pi$ 的整数倍.

因 $\varphi(x)$ 在点 x_0，x_0+T 可导，即在这两点连续，故存在点 x_0 的一个邻域 Δ，当 $x\in\Delta$ 时，有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\pi,$$
$$|\varphi(x+T)-\varphi(x_0+T)|<\pi.$$

由于 $\varphi(x_0)=\pi$ 的整数倍，$\varphi(x_0+T)=\pi$ 的整数倍，所以，对于 Δ 内的 x，若 $\varphi(x)=\pi$ 的整数倍，则 $\varphi(x)=\varphi(x_0)$（否则，有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\geq\pi$）；若 $\varphi(x+T)=\pi$ 的整数倍，则

$$\varphi(x+T)=\varphi(x_0+T).$$

这样，在 Δ 内只有下面两种可能：

1. 如果存在点 x_0 的一个邻域 Δ_1，使得当 $x\in\Delta_1$ 时，$\varphi(x)\equiv\varphi(x_0)$，那么 $\varphi'(x_0)=0$. 此时，因 $\varphi(x)=\pi$ 的整数倍，即 $\varphi(x)$ 都等于 π 的整数倍，故由 ③ 式知 $\varphi(x+T)$ 也都等于 π 的整数倍，从而在 Δ_1 内 $\varphi(x+T)\equiv\varphi(x_0+T)$，那么也有 $\varphi'(x_0+T)=0$，于是



$|\varphi'(x_0+T)|=|\varphi'(x_0)|$.

ii 如果在点 x_0 的任何一个邻域内，$\varphi(x)\neq\varphi(x_0)$，那么可在 A 内找到一点列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0,n=1,2,3,\cdots)$，且 $\varphi(x_n)\neq\varphi(x_0)$，则 $\varphi(x_n)\neq\pi$ 的整数倍. 因此，根据第一种情形的结论有 $|\varphi'(x_n+T)|=|\varphi'(x_n)|$.

而 $\varphi'(x)$ 在点 x_0，x_0+T 连续，即当 $x_n\to x$ 时有 $\varphi'(x_n)\to\varphi'(x_0)$，$\varphi'(x_n+T)\to\varphi'(x_0+T)$，亦有 $|\varphi'(x_n)|\to|\varphi'(x_0)|$，$|\varphi'(x_n+T)|\to|\varphi'(x_0+T)|$，于是 $|\varphi'(x_0+T)|=|\varphi'(x_0)|$.

所以，当 $\varphi(x_0)=\pi$ 的整数倍时，也得到了 $|\varphi'(x_0+T)|=|\varphi'(x_0)|$.

综上所述，对于任何 $x\in A$，都有 $|\varphi'(x+T)|=|\varphi'(x)|$，因此，$|\varphi'(x)|$ 在 A 上是周期函数. 这便引出了矛盾，故假设不真，从而命题得证.

把 $\cos[\varphi(x)]$ 换成 $\sin[\varphi(x)]$，由 $\sin[\varphi(x)]=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\varphi(x)\right]$ 及 $\left|\left[\frac{\pi}{2}-\varphi(x)\right]'\right|=|\varphi'(x)|$，可知命题仍然成立.

能力训练

1. 函数 $y=\sin x+\cot x$ $(0<x<\pi)$ 的一个周期内的图像大致是 ( )

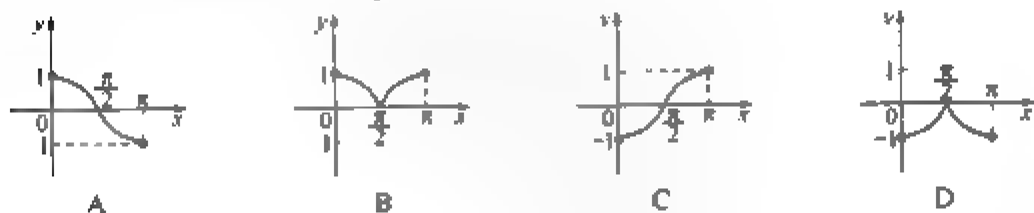


图 1-1-7

2. (2005 年全国高中数学联合竞赛浙江省预赛试题) 设 $f_1(x)=\sqrt{2}$，$f_2(x)=\sin x+\cos\sqrt{2}x$，$f_3(x)=\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\cos\sqrt{2}x$，$f_4(x)=\sin x^2$，上述函数中，周期函数的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. (第 11 届"希望杯"高二竞赛题) 周期函数 $f(x)$ 的图像大致如图 1-1-8 所示.

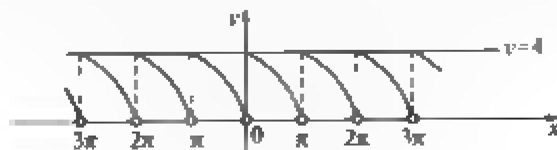


图 1-1-8



当$0\leqslant x<\pi$时，$f(x)=4\cos\frac{x}{2}$，则在$(-\infty,+\infty)$上$f(x)$的解析式是 ( )

A. $4\cos\frac{x}{2}$

B. $4\cos\left(\frac{x}{2}+k\pi\right),k\pi\leqslant x<(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$

C. $4\cos\left(\frac{x-k\pi}{2}\right),k\pi\leqslant x<(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$

D. $4\cos\left(\frac{x+k\pi}{2}\right),k\pi\leqslant x<(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$

4.（第10届"希望杯"高二第2试试题）最小正周期为T的周期函数$y=f(x)$，当$x\in(0,T)$时，反函数是$y=f^{-1}(x)$（定义域为D），那么当$x\in(-T,0)$时，$y=f(x)$的反函数是 ( )

A. $y=f^{-1}(x+T),x\in D$　　B. $y=f^{-1}(x)+T,x\in D$

C. $y=f^{-1}(x-T),x\in D$　　D. $y=f^{-1}(x)-T,x\in D$

5.（1990年理科全国高考题）已知图1-1-9是函数$y=2\sin(\omega x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图像，那么 ( )

A. $\omega=\frac{10}{11},\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. $\omega=\frac{10}{11},\varphi=-\frac{\pi}{6}$

C. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$

D. $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$

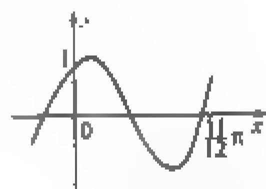


图1-1-9

6.（2002年全国数学竞赛山东省预赛题）已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,x\in\mathbf{R})$，满足$f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，若$A=\sin(\omega x+\varphi+9\omega)$，$B=\sin(\omega x+\varphi-9\omega)$，则$A$与$B$的大小关系是 ( )

A. $A>B$　　B. $A=B$　　C. $A<B$　　D. 不确定

7. 对于任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)=|\sin x|$，当$n\leqslant x<n+1$（n为整数）时，$g(x)=x-n$，则在$f(x),g(x),f(x)+g(x),f(x)g(x)$中，周期函数的个数为____。

8.（第2届"希望杯"高一竞赛题）式子$[x]$表示不超过实数x的最大整数，函数$f(x)=x-[x]$可以表示成某个一次函数的形式，这个形式是$f(x)=$____。

9.（第2届"希望杯"高一竞赛题）将$y=\sin x$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的图像延拓到整个实



数轴，使它成为以$\frac{\pi}{2}$为周期的函数，如图1-1-10所示。

这个新函数的解析式是＿＿＿＿＿＿.

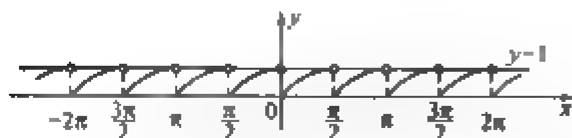


图1-1-10

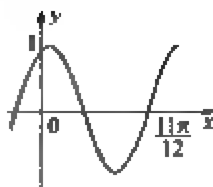


图1-1-11

10. $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，且$f(1+x)+f(1-x)=f(1)$，$f(x)$在$[0,1]$上是减函数，则$f\left(\frac{10}{3}\right)$，$f\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f\left(\frac{9}{2}\right)$从小到大排列为＿＿＿＿＿＿.

11. 函数$y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图像如图1-1-11所示，则函数表达式是＿＿＿＿＿＿.

12. 已知正弦型曲线$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$在同一个周期内经过三个点：$A(1,2)$，$B\left(\frac{5}{2},0\right)$，$C(3,-2)$，则符合条件的函数表达式为＿＿＿＿.

13. (2002年全国高中数学联赛题)已知$f(x)$是定义在R上的函数，$f(1)=1$，且对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x+5)\geqslant f(x)+5$，$f(x+1)\leqslant f(x)+1$，若$g(x)=f(x)+1-x$，求$g(2002)$的值.

14. 已知$y=3\sin\left(\frac{2m+1}{3}\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$(其中$m\in\mathbf{N}$)，对任意实数$a$，在区间$[a,a+3]$上$y$的值为$\frac{5}{4}$出现的次数不少于4次且不多于8次，求$m$的值.

15. 证明下列函数为非周期函数

(1) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=\sin x^2$；

(3) $f(x)=\sin\sqrt[n]{x}$，$(n\in\mathbf{N}$，且$n\geqslant2)$.



2 象称函数的周期性

知识扫描

函数图像的周期性与对称性是相互联系、紧密相关的，都是函数性质的几何表现形态，更加直观地反映了自变量与函数之间的变化规律，已成为近几年数学高考和竞赛命题的热点之一.

我们把图像具有对称性的函数称为象称函数.

Ⅰ. 函数图像的对称性

通常包含两类内容：

(1) 自对称性：同一函数图像自身的对称性

① 函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$，

当 $b=a$ 时，得到

函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$

当 $a=0$ 时，得到偶函数的图像关于直线 $x=0$(即 y 轴)对称

② 函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称 $\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$.

当 $b=a=0$ 时，得到奇函数的图像关于点 $(0,0)$ 对称

(2) 互对称性：两个函数图像之间的对称性

① 函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称

特别地，函数 $y=f(x+a)$ 与函数 $y=f(a-x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称；函数 $y=f(2a-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称.

② 函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称的函数解析式为 $y=f(2a-x)$；

③ 函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称的函数解析式为 $y=-f(2a-x)$

Ⅱ 关于函数对称性与周期性的关系

若函数的图像具有如下的双对称性，则它们是周期函数：

(1) 若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 都对称($a\neq b$)，即满足 $f(x+a)=f(a-x)$，且 $f(x+b)=f(b-x)$，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $2(a-b)$ 是 $f(x)$ 的一个周期.

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 的图像关于两点 $A(a,0)$ 和 $B(b,0)$($a\neq b$)都对称，即满足 $f(a+x)=-f(a-x)$，且 $f(b+x)=-f(b-x)$，那么函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $2(a-b)$ 是 $f(x)$ 的一个周期.

(3) 如果函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，又关于点 $B(b,0)$ 对称($a\neq b$)，即满足 $f(a+x)=f(a-x)$，且 $f(b+x)=-f(b-x)$，那么函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $4(a-b)$ 是 $f(x)$ 的一个周期.

注　函数图像有且只有一条对称轴(或一个对称中心)的函数不是周期函数.

(4) 因为奇函数关于原点对称，偶函数关于 y 轴对称，所以具有奇偶性的函数，当其具有双对称性时，该函数也是周期函数. 其常见的一般性结论如下：

① 若函数 $f(x)$ 是定义域上的偶函数(即 $f(x)$ 关于直线 $x=0$ 对称)，且满足 $f(x+a)=f(b-x)$ $\left(\text{即 } f(x) \text{ 关于直线 } x=\frac{a+b}{2} \text{ 对称}\right)$($a\neq -b$)，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $a+b$ 是 $f(x)$ 的一个周期.

特别地，若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(a-x)$(即 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称)，且为偶函数(即 $f(x)$ 关于直线 $x=0$ 对称)，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $2a$ 是 $f(x)$ 的一个周期.

② 若函数 $y=f(x)$ 是定义域上的奇函数(即 $f(x)$ 关于原点 $(0,0)$ 对称)，且满足 $f(x+a)=-f(b-x)$ $\left(\text{即 } f(x) \text{ 关于点 } \left(\frac{a+b}{2},0\right) \text{ 对称}\right)$($a\neq -b$)，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $a+b$ 是 $f(x)$ 的一个周期.

特别地，若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=-f(a-x)$(即 $f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称)，且为奇函数(即 $f(x)$ 关于原点 $(0,0)$ 对称)，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $2a$ 是 $f(x)$ 的一个周期.

Ⅲ．周期函数的性质

(1) 若周期函数 $f(x)$ 为奇函数，最小正周期为 T，且 $f(0)$ 有意义，则 $f(0)=f(nT)=0$ $(n\in \mathbf{Z})$.

这是因为在 $f(x+T)=f(x)$ 中分别令 $x=0$，$-T$，有 $f(T)=f(0)$，$f(0)=f(-T)$，由 $f(-T)=-f(T)$，可得 $f(0)=f(T)=0$. 且易证此时 $f(x)$ 定义域的两端均无界.

(2) 若一个周期为 $2(b-a)$ 的函数 $y=f(x)$ $(x\in \mathbf{R})$ 的图像关于直线 $x=a$(或 $x=b$)对称，则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=b$(或 $x=a$)对称.

因为：若 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow f(2a-x$



$f(x)=f(b-x)=f[b-x-2(b-a)]=f[a+(a-b-x)]=f[a-(a-b-x)]=f(b+x)$

特别地，当 $a=0$ 时，即以 $2b$ 为周期的偶函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=b$ 对称

例题分析

例1　已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若 $g(x)$ 是奇函数，且 $g(x)=f(x-1)$，求 $f(2007)$ 的值．

分析　本题直接求似乎无从下手，必须从条件出发探求规律，即利用函数周期性解答，方可出奇制胜．

解　由条件 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，且 $g(x)=f(x-1)$，得 $g(-x)=f(-x-1)=f(x+1)=-g(x)$，即 $g(x)=-f(x+1)$，所以 $f(x-1)=-f(x+1)$，

即 $f(x)=-f(x+2)=f(x+4)$．

所以 $f(x)$ 是周期函数，一个周期为 4．

又 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $g(0)=0$，所以 $f(-1)=g(0)=0$，故

$$f(2007)=f(4\times 502-1)=f(-1)=0.$$

说明　解答此题关键是发现函数的周期性，同时挖掘出隐含条件 $g(0)=0$．

例2　设定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，且当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)$ 为增函数，若 $f(-2)\geqslant 0$，求证：当 $x\in[4,6]$ 时，$|f(x)|$ 为减函数．

证明　在 $[4,6]$ 内任取 x_1，x_2，设 $4\leqslant x_1<x_2\leqslant 6$，

则
$$-2\leqslant -x_2+4<-x_1+4\leqslant 0.$$

因为 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上为增函数，

所以
$$f(-x_1+4)>f(-x_2+4)\geqslant f(-2)\geqslant 0. \quad ①$$

又函数 $f(x)$ 是偶函数且关于 $x=2$ 对称，

所以 $f(-x)=f(x)$，$f(2+x)=f(2-x)$，故

$$f(x+4)=f[2+(2+x)]=f[2-(2+x)]$$
$$=f(-x)=f(x),$$

知函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数．

故由 ① 得

$$f(-x_1)>f(-x_2)\geqslant 0.$$

又
$$f(-x)=f(x),$$



所以 $$f(x_1) > f(x_2) \geqslant 0.$$

故当 $4 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 6$ 时，有

$$|f(x_1)| - |f(x_2)| = f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

即 $$|f(x_1)| > |f(x_2)|,$$

故当 $x \in [4, 6]$ 时，$|f(x)|$ 为减函数。

例 3 （199_ 年四川省高中数学联赛决赛第二(2)题）设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，且 $f(x) = -g(x+c)(c>0)$，则 $f(x)$ 是最小正周期为______的周期函数。

解 本题的"标准答案"为 $4c$，解答过程如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= -g(x+c) = -g[-c-(-2c-x)] \\ &= g[c+(-2c-x)] = f(-2c-x) \\ &= f(-2c+x) = g(3c+x) \\ &= g[-c+(4c+x)] = -g[c-(4c+x)] \\ &= f[-(4c+x)] = f(4c+x). \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的最小正周期为 $4c$。

说明 上述解答，由 $f(x) = f(x+4c)$ 断定 $4c$ 为 $f(x)$ 的最小正周期，与最小正周期的定义不符。由 $f(x) = f(x+4c)$ 仅能判断 $f(x)$ 是以 $4c$ 为一个周期的周期函数，要说明它是最小正周期，必须证明 $f(x)$ 没有比 $4c$ 小的正周期，而这一点在此是无法证明的。

事实上，本题中的函数 $f(x)$ 不一定有最小正周期，即使有，也不一定是 $4c$。如设 $f(x) = \cos x$，$g(x) = \sin x$，则 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，且有 $f(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -g\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$，但 $4 \times \frac{3\pi}{2} = 6\pi$ 不是 $f(x)$ 的最小正周期。

综上所述，$4c$ 不一定是 $f(x)$ 的最小正周期，且 $f(x)$ 有无最小正周期、最小正周期是什么由题设无法确定。

例 4 （2005 年广东高考题）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：对于任意的实数 x，都有 $f(2+x) = f(2-x)$，$f(7+x) = f(7-x)$，且在区间 $[0, 7]$ 上只有 $f(1) = f(3) = 0$。

(1) 试判断 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 求方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[-2005, 2005]$ 上的根的个数。

解 (1) 对于 $f(2+x) = f(2-x)$，以 $x+2$ 代 x 得 $f(4+x) = f(-x)$，同理由 $f(7+x) = f(7-x)$ 得 $f(14+x) = f(-x)$，所以 $f(4+x) = f(14+x)$，故有 $f(10+x) = f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，且一个周期 $T = 10$。又因为 $f(-3) = f(7) \neq 0$，而 $f(3) = 0$，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数。

(2) 因为 $f(x)$ 在区间 $[0, 7]$ 上只有 $f(1) = f(3) = 0$，且周期 $T = 10$，所以方程 $f(x)$



$=0$ 在区间$[0,10)$,$[10,20)$,$[20,30)$,…,$[2000,2005]$上都有2个根,共有402个,而它在区间$[-10,0)$,$[-20,-10)$,…,$[-1990,-2000)$上也都有2个根,又因为$f(-2007)=f(3)=0$,$f(-2009)=f(1)=0$,所以方程$f(x)=0$在区间$[-2000,-2005]$上无解,因而有400个根.

综上,方程$f(x)=0$在区间$[-2005,2005]$上共有802个实数根.

说明 这是一道情理之中、意料之外的好题.按常理,问题(1)应该设计为"证明函数$f(x)$是周期函数",与问题(2)形成"串联型"的关系,本题设计的高明之处正是违背了这个"常理",设计为"判断$f(x)$的奇偶性",而判断的结论出人意料之外,却是"非奇非偶函数".

例5 (第十三届"希望杯"高一培训试题)定义在R上的函数$f(x)$的图像关于点(a,b),(c,d)都对称($a\neq c$),则 ( )

A. $f(x)$是以$a-c$为周期的函数　　B. $f(x)$是以$2(a-c)$为周期的函数

C. $f(x)$是以$\frac{1}{2}(a-c)$为周期的函数　　D. $f(x)$不是周期函数

解 因函数$f(x)$的图像关于点(a,b)对称,所以对任意$x\in \mathbf{R}$,$f(x)=2b-f(2a-x)$成立;

又函数$f(x)$的图像关于点(c,d)对称,所以对任意$x\in \mathbf{R}$,$f(x)=2d-f(2c-x)$成立;

于是,$f(2a-x)=2b-f[2c-(2a-x)]=2b-f(x+2c-2a)=f(x+2c-2a)$,可见$f(x)$是以$2(a-c)$为周期的函数,选(B).

评析 这是关于两点对称的函数的周期性问题,关键在于正确地进行数形之间的转换,将图像的对称信息翻译成数学符号语言.

思考 本题根据两点对称判断函数的周期性,我们可以类比思考:关于一点一线对称和关于两线对称的函数是否具有周期性?

答案是肯定的.关于一点一线对称,若$y=f(x)(x\in \mathbf{R})$的图像关于一点$P(a,y_0)$成中心对称,且关于直线$x=b(a\neq b)$成轴对称,则$f(x)$是以$4(b-a)$为周期的函数.

证明 图像上任一点$(x,f(x))$关于$P(a,y_0)$的对称点$(2a-x,2y_0-f(x))$也在图像上,即有$f(2a-x)=2y_0-f(x)$,且$f(b-x)=f(b+x)$,则

$$
\begin{aligned}
f(x)&=2y_0-f(2a-x)=2y_0-f[b-(b-2a+x)]\\
&=2y_0-f[b+(b-2a+x)]=2y_0-f(2b-2a+x)\\
&=f[2a-(2b-2a+x)]=f[b-(3b-4a+x)]\\
&=f[b+(3b-4a+x)]=f[4(b-a)+x],
\end{aligned}
$$

所以,$f(x)$是以$4(b-a)$为周期的函数.



特别地，(1) 若 $y_0=0$，即函数满足 $f(a+x)=-f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)(a\neq b)$ 时，$f(x)$ 是以 $4(b-a)$ 为周期的函数。

(2) 当 $a=0$，$y_0=0$ 时，即奇函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=b(b\neq 0)$ 对称时，则 $f(x)$ 是以 $4b$ 为周期的函数。

注 对 a、b 之间的任一数 r，$f(x)$ 关于点 $(r,0)$ 及直线 $x=r$ 均不对称，则 $4|b-a|$ 是 $f(x)$ 的最小正周期。

关于两线对称 若函数 $y=f(x)(x\in \mathbf{R})$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a>b)$ 都对称，则 $f(x)$ 以 $2(a-b)$ 为周期。

特别地，当 $b=0$ 时，即：偶函数 $f(x)$ 的图像若关于直线 $x=a(a\neq 0)$ 对称，则 $f(x)$ 是以 $2a$ 为周期的函数。

一般地，上面关于两线对称的结论还可推广为：若函数 $y=f(x)(x\in \mathbf{R})$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$ 对称，且在这两直线之间再也没有对称轴，则函数 $y=f(x)$ 是以 $(2b-2a)$ 为最小正周期的函数。

证明 设点 $P(x,y)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的任意一点，因为 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，所以 $P(x,y)$ 关于 $x=a$ 的对称点 $P'(2a-x,y)$ 在 $y=f(x)$ 的图像上，所以有 $f(2a-x)=f(x)$。

同理可证：$f(2b-x)=f(x)$。

因为 $f[(2b-2a)+x]=f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x)$，所以 $T=2b-2a$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个正周期。

若存在常数 $T'(0<T'<2b-2a)$ 是 $y=f(x)$ 的正周期，令 $a'=\frac{2b-T'}{2}$，显然有 $a<a'<b$，则有 $f(2a'-x)=f(2b-T'-x)=f[2b-(T'+x)]=f(T'+x)=f(x)$，所以 $x=a'$ 为函数 $y=f(x)$ 图像的对称轴，这与已知条件矛盾，所以命题为真。

说明 ① 这个抽象的数学问题，有一个很好的直观现实模型，把两面镜子面对面，从两面镜子的中间看镜子中的成像。



图1-2-1

若你处于其中，将看到有许多肖像位置呈现出周期性变化，把这一实际问题加以抽象，把肖像抽象为函数上的点，两面镜子抽象为对称轴，就是关于两线对称问题模型



② 当函数 $y=f(x)$ 关于点对称或轴对称时，可以与周期性互相推证，我们可推广得到如下定理.

定理1 给出三个条件($a\neq b$)：(1) $f(x)$图像关于 $x=a$ 对称；(2) $f(x)$图像关于 $x=b$对称；(3) $f(x)$是以 $T=2|b-a|$为一个周期的周期函数. 以其中任两个论断为条件，另一个论断为结论，得到的三个命题均为真命题.

定理2 给出三个条件($a\neq b$)：(1) $f(x)$图像关于点$(a,0)$对称；(2) $f(x)$图像关于点$(b,0)$对称；(3) $f(x)$是以 $T=2|b-a|$ 为一个周期的周期函数. 以其中任两个论断为条件，另一个论断为结论，得到的三个命题均为真命题. 且可进一步推广至(a,y_0)，(b,y_0).

证明 略.

但一般地，函数 $y=f(x)$关于点对称、轴对称与周期性，以其中任两个论断为条件，另一个论断为结论，是不可以互相推证的. 下面用两个反例来说明.

对于奇函数、轴对称、周期性三者之间的关系，我们可以借助正弦函数为模型，并作适当改变后建构函数.

反例1 $y=f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\\ \frac{2}{\pi}x, & x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}k\in\mathbf{Z}.$

此函数(如图1-2-2)满足关于点(0,0)对称且 $T=2\pi$，其关于点$(\pi,0)$对称，但关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$不对称.

对于偶函数、点对称、周期性三者之间的关系，我们可以借助余弦函数为模型，并作适当改变后建构函数.

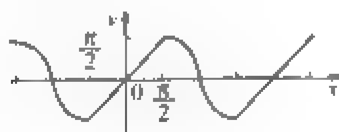


图1-2-2

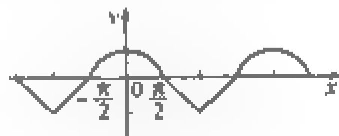


图1-2-3

反例2 $y=f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{2}{\pi}x, & x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}k\in\mathbf{Z}.$

此函数(如图1-2-3)满足关于直线 $x=0$ 对称且 $T=2\pi$，其关于直线 $x=\pi$ 对称，但关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$不对称.



例 6 （1998 年全国高中数学联赛题）若 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是以 2 为周期的偶函数，且 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{1998}}$，则 $f\left(\frac{98}{19}\right)$、$f\left(\frac{101}{17}\right)$、$f\left(\frac{104}{15}\right)$ 由小到大的排列是________

解 由题设，$x\in\mathbf{R}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，因为 $f(2k-x)=f(x)=f(-x)$，

所以 $f\left(\frac{98}{19}\right)=f\left(6-\frac{16}{19}\right)=f\left(-\frac{16}{19}\right)=f\left(\frac{16}{19}\right)$，$f\left(\frac{101}{17}\right)=f\left(6-\frac{1}{17}\right)=f\left(-\frac{1}{17}\right)=f\left(\frac{1}{17}\right)$，$f\left(\frac{104}{15}\right)=f\left(6+\frac{14}{15}\right)=f\left(\frac{14}{15}\right)$，而 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{1998}}$ 为增函数，

故 $f\left(\frac{1}{17}\right)<f\left(\frac{16}{19}\right)<f\left(\frac{14}{15}\right)$，即 $f\left(\frac{101}{17}\right)<f\left(\frac{98}{19}\right)<f\left(\frac{104}{15}\right)$。

说明 此题关键是利用函数的周期性，把三个函数值转化到同一单调区间[0，1]进行比较，这正体现了利用函数单调性比较大小的一般方法。

本题也可用图像法解答如下：由偶函数知，[-1，0]上的图像与[0，1]上的图像关于 y 轴对称，又以 2 为周期，知[-1，0]上的图像与[1，2]上的相同，故得图 1-2-1，设已知三个函数值记为 A、B、C，则这三点分布在数值 6 的两侧，易见 C 点最低，A 点次之，B 点最高。

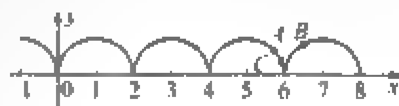


图 1-2-1

例 7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对任意的 x、y，有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，并存在非零实数 c，使 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$，且 $f(0)\neq0$，求证函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2kc(k\in\mathbf{Z})$ 都对称。

证明 ①考虑到条件 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$ 的使用，我们取 $y=\frac{c}{2}$，有 $f\left(x+\frac{c}{2}\right)+f\left(x-\frac{c}{2}\right)=2f(x)\cdot f\left(\frac{c}{2}\right)=0$，即 $f\left(x+\frac{c}{2}\right)=-f\left(x-\frac{c}{2}\right)$，以 $x+\frac{c}{2}$ 代 x，有 $f(x+c)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=2c$ 是 $f(x)$ 的一个周期。

②取 $x=y=0$，则有 $2f(0)=2f^2(0)$，由 $f(0)\neq0$ 得 $f(0)=1$，所以有 $f(y)+f(-y)=2f(0)\cdot f(y)=2f(y)$，即 $f(-y)=f(y)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，它的图像关于直线 $x=0$ 对称。

由①、②可知函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2kc(k\in\mathbf{Z})$ 对称。

例 8 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上，且 $f(0)=1$，$g(a)=1(a\neq0)$，函数 $g(x)$ 是奇函数，如果 $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$。 ①

求证：函数 $f(x)$ 是周期函数。

证明 以 $x=y=0$ 代入①，得 $f(0)=f^2(0)+g^2(0)$，即 $1=1+g^2(0)$，从而 $g(0)=0$



同理，以 $x=y=a$ 代入①可得 $f(a)=0$.

在①中，令 $x=0$，$y=a$，得

$$f(-a)=f(0)f(a)+g(a)g(0)=0.$$

在①中，再分别令 $y=a$ 和 $y=-a$，得

$$f(x-a)=f(x)f(a)+g(x)g(a)=g(x), \quad ②$$

$$f(x+a)=f(x)f(-a)+g(x)g(-a)=-g(x) \quad ③$$

③+②得

$$f(x+a)+f(x-a)=0. \quad ④$$

在④中用 $x+2a$ 替换 x 得

$$f(x+3a)+f(x+a)=0. \quad ⑤$$

⑤－④得

$$f(x+3a)=f(x-a),$$

即

$$f(x+4a)=f(x).$$

所以函数 $f(x)$ 是一个周期为 $4a$ 的周期函数

评析 上面运用方程思想探求函数方程中函数的周期性，就是不断地通过变元代换，并在构造方程与解方程的过程中，使函数方程中隐藏的周期性充分地显露出来，从而识别其"庐山真面目"。

能力训练

1. (2006年高考数学(山东理科)试题)已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(6)$ 的值为 ( )

   A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. (2007年浙江省高中数学竞赛 B 卷试题)设非常值函数 $f(x)(x\in \mathbf{R})$ 是一个偶函数，它的函数图像关于直线 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对称，则该函数是 ( )

   A. 非周期函数　　B. 一个周期为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的周期函数

   C. 一个周期为 $\sqrt{2}$ 的周期函数　　D. 一个周期为 2 的周期函数

3. (1996年高考数学试题)设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$ 等于 ( )

A. 0.5　　B. -0.5　　C. 1.5　　D. -1.5

4. 函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi<\pi)$ 为偶函数，该函数的部分图像如图1-2-5所示，A、B 两点间的距离为 $4\sqrt{2}$，则该函数的一条对称轴方程为 ( )



图1-2-5

A. $x=\frac{\pi}{2}$　　B. $x=2$

C. $x=4$　　D. $x=\pi$

5. 若函数 $f(x)$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 满足：$f(x+999)=-\frac{1}{f(x)}$，$f(999+x)=f(999-x)$，则 $f(x)$ ( )

A. 是奇函数而非偶函数　　B. 是偶函数而非奇函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 不是奇函数也不是偶函数

6. (1992年全国高中联赛试题)设 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且满足下列关系：$f(10+x)=f(10-x)$，$f(20-x)=-f(20+x)$，则函数 $f(x)$ 是 ( )

A. 偶函数又是周期函数　　B. 偶函数但不是周期函数

C. 奇函数又是周期函数　　D. 奇函数但不是周期函数

7. (第八届"希望杯"高二竞赛题) $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，且 $f(1+x)=f(1-x)$，当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-\frac{1}{2}x$，则 $f(8.6)=$________。

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2$，则 $2k-1\leqslant x\leqslant 2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时 $f(x)$ 的表达式为____________。

9. (第十届"希望杯"高二竞赛题)函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个周期为2的偶函数，当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)$ 的解析式写成分段函数的形式是________，写成统一的形式是________。

10. (2007年浙江省高中数学竞赛A卷试题)设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且满足 $f(x+2)=-f(x)$；又当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x$，则 $\left\{x\mid f(x)=-\frac{1}{2}\right\}=$________

11. (2004年全国高中数学联赛试题)在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $f(x)=a\sin ax+\cos ax(a>0)$ 在一个最小正周期长的区间上的图像与函数 $g(x)=\sqrt{a^2+1}$ 的图像所围成的封闭图形的面积是________。

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{3}{4},0\right)$ 成中心对称，且满足 $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$，$f(-1)=1$，$f(0)=-2$，那么 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2008)$ 的值



是________.

13. 已知定义在 R 上的偶函数 $y=f(x)$，其图像关于 $x=1$ 对称，且当 $x\in[2,3]$时，$f(x)=\sqrt{x}$，试绘出函数 $y=f(x)$在区间$[-4,4]$上的草图.

14. 如果函数 $f(x)$的图像关于两点(a,b)和(m,n)(其中 $a\neq m$)都对称，那么对于函数 $f(x)$定义域内的每一个 x，函数值 $y_k=f[x+2k(a-m)]$$(k\in Z)$构成的数列$\{y_k\}$是等差数列，且公差是 $2(b-n)$.

15. 设 $y=f(x)$是 R 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$.

(1) 试证：直线 $x=1$ 是函数 $y=f(x)$图像上的一条对称轴.

(2) 试求当 $x\in[1,5]$时，函数 $y=f(x)$的解析式.

(3) 若 $A=\{x\mid |f(x)|>a,\ x\in R\}$，且 $A\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.



3　函数方程解的周期性

知识扫描

常见类型有：

(1) 函数值之和等于常数型

若 $f(x+a)+f(x+b)=c(a\neq b)$，则函数 $f(x)$是周期函数，且 $2|a-b|$ 是 $f(x)$的一个正周期.

因为 $f(x+a)+f(x+b)=c$，

在上式中用 $x-b$ 替换 x，则

$$f(x+a-b)+f(x)=c,$$

再用 $x+a-b$ 替换 x，可得

$$f(x+2a-2b)+f(x+a-b)=c,$$

即
$$f(x+2a-2b)=f(x),$$

所以 $f(x)$是周期函数，且 $2|a-b|$ 是 $f(x)$的一个正周期.

(2) 函数值互为倒数或负倒数型

若 $f(x+a)=\pm\dfrac{1}{f(x+b)}(a\neq b)$，则函数 $y=f(x)$是周期函数，且 $2|a-b|$ 是 $f(x)$的一个正周期.

特别地，若 $f(x+a)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$，则函数 $y=f(x)$是周期函数，且 $2|a|$ 是 $f(x)$的一个正周期.

(3) 函数值为分式递推型

① 若

$$f(x+a)=\frac{1+f(x+b)}{1-f(x+b)}(a\neq b),$$



则函数 $y=f(x)$ 是周期函数,且 $4|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个正周期.

特别地,若

$$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

则函数 $y=f(x)$ 是周期函数,且 $4|a|$ 是 $f(x)$ 的一个正周期.

② 若

$$f(x+a)=\frac{1-f(x+b)}{1+f(x+b)}\quad(a\neq b),$$

则函数 $y=f(x)$ 是周期函数,且 $2|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个正周期.

特别地,若

$$f(x+a)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)},$$

则函数 $y=f(x)$ 是周期函数,且 $2|a|$ 是 $f(x)$ 的一个正周期.

③ 若

$$f(x+a)=\frac{f(x+b)+1}{f(x+b)-1}\quad(a\neq b),$$

则函数 $y=f(x)$ 是周期函数,且 $2|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个正周期.

特别地,若

$$f(x+a)=\frac{f(x)+1}{f(x)-1},$$

则函数 $y=f(x)$ 是周期函数,且 $2|a|$ 是 $f(x)$ 的一个正周期.



例题分析

例 1 函数 $f(x)$ 的定义域为 R,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,$f(x+1)-f(x)=1$,函数 $F(x)=f(x)-x$ 是否为周期函数,为什么?

解 由 $f(x+1)-f(x)=1$,使我们感到问题必与 $F(x+1)$ 有关.$F(x+1)=f(x+1)-(x+1)$,以 $f(x+1)=f(x)+1$ 代入,得 $F(x+1)=f(x)+1-(x+1)=f(x)-x=F(x)$.所以 $F(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

说明 本题的结论实际上给出了函数方程 $f(x+1)-f(x)=1$ 的通解:

$$f(x)=F(x)+x.$$



其中 $F(x)$ 是以 1 为周期的任一周期函数.

例 2 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足 $f(x)+f(x+2)=a$，$f(1)=0$，其中 a 为常数，试判断方程 $f(x)=0$ 在 $(-3,7)$ 内至少有几个根.

分析 从抽象等式中获取新等式，探究 $f(x)$ 的周期性.

解 在 $f(x)+f(x+2)=a$ 中，将 x 用 $x+2$ 代替，得 $f(x+2)+f(x+4)=a$，

所以 $f(x)=f(x+4)$，因此 4 为 $f(x)$ 的一个周期. 于是 $f(5)=f(1)=0$，$f(3)=f(-1)=-f(1)=0$，$f(4)=f(0)=0$. 所以 -1、0、1、3、4、5 是方程 $f(x)=0$ 在 $(-3,7)$ 内的 6 个根.

另一方面，$f(-2)=f(-2+4)=f(2)=-f(-2)$，所以 $f(-2)=0$，$f(2)=0$. 于是 $f(6)=f(2+4)=f(2)=0$. 所以 -2、2、6 也是方程 $f(x)=0$ 在 $(-3,7)$ 内的 3 个根.

因此方程 $f(x)=0$ 在 $(-3,7)$ 内至少有 9 个根.

评析 本题利用函数的周期性和奇偶性灵活赋值，从而快速解决问题.

例 3 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\neq-1,0$，且对任意的 $x、y\in\mathbf{R}$，$f(x-y)=-\dfrac{f(x)}{1+f(y)}$. 请问 $f(x)$ 是周期函数吗？为什么？

解 已知 $f(x-y)=-\dfrac{f(x)}{1+f(y)}$， ①

因对任意的 $x、y\in\mathbf{R}$ 成立，且 $f(x)\neq0$，于是可取 $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ 代入 ① 得

$$f(0)=-\frac{f(0)}{1+f(0)},$$

即 $-\dfrac{1}{1+f(0)}=1$，得 $f(0)=-2$.

又取 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 有 $f(0)=-\dfrac{f(1)}{1+f(1)}$，则 $\dfrac{f(1)}{1+f(1)}=2$，得 $f(1)=-2$.

再取 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 有 $f(0)=-\dfrac{f(2)}{1+f(2)}$，得 $\dfrac{f(2)}{1+f(2)}=2$，故 $f(2)=-2$.

按上述方法可陆续得 $f(3)=-2$，$f(4)=-2$，…. 猜测 $f(x)$ 有两种可能：(1) $f(x)$ 的一个周期为 1；(2) $f(x)$ 既是常数函数又是周期函数. 猜测(2)的证明不易，先试证猜测(1)：

以 $y=1$ 代入 ①，有 $f(x-1)=-\dfrac{f(x)}{1+f(1)}$，由 $f(1)=-2$，即有 $f(x-1)=-\dfrac{f(x)}{1+(-2)}=f(x)$，令 $x-1=t$，$x=t+1$，则 $f(t+1)=f(t)$，即 $f(x)$ 是一个周期为



1 的周期函数.

说明 周期函数的定义式 $f(x+T)=f(x)$，它所反映的函数值周而复始重复呈现的周期特征，必能从它的一些特定的函数值上呈现出来. 根据本例所给的条件，求出自变量取一系列特殊的值时，对应的函数值呈现出在一个固定的间隔内重复出现的周期特征，就可依此猜测出函数的一个周期，这是本题获解的关键. 留下的只需再证明这个猜测的正确性即可.

例4 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意 a、$b\in\mathbf{R}$，有 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b)$，且存在 $c>0$，使 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$. 试问 $f(x)$ 是不是周期函数？若是，找出它的一个周期；若不是，请说明理由.

分析 由 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b)$ 的外形结构，联想和差化积公式 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$，且 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，这样可以假定 $y=\cos x$ 是 $f(x)$ 的一个原型，而 $y=\cos x$ 的最小正周期是 2π，由此猜想 $f(x)$ 是以 $2c$ 为周期的周期函数.

要证明 $2c$ 为 $f(x)$ 的一个周期，则只需证明 $f(x+2c)=f(x)$. 而由已知条件 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$，$f(a+b)+f(a-b)=2f(a)\cdot f(b)$ 知，必须选择适当的 a、b 的值，使得条件等式中出现 $f\left(\frac{c}{2}\right)$ 和 $f(x)$.

解 令 $a=x+\frac{c}{2}$，$b=\frac{c}{2}$，代入 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b)$，得 $f(x+c)=-f(x)$，所以 $f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x)$.

所以 $f(x+2c)=f(x)$.

即 $f(x)$ 是以 $2c$ 为周期的周期函数.

说明 有些命题，当解题思路不明确时，可以通过观察、联想、特殊探路、寻求一般结构等进行探索. 而寻找原型不失为一种有效的方法，往往能使我们迅速找到求解某些函数方程问题的思路.

常见的抽象函数的原型还有：满足条件 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 和 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ 的函数 $f(x)$ 的一个原型是 $\log_a x$；满足条件 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 和 $f(x-y)=f(x)-f(y)$ 的函数 $f(x)$ 的一个原型是 kx；满足条件 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 和 $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ 的函数 $f(x)$ 的一个原型是 a^x 等等.

例5 设常数 $\lambda\neq 0$，n、m 是正整数，且 $m>n$，$m\neq 2n$，则由方程

$$f(x+\lambda)+f(x-\lambda)=2\cos\frac{2n\pi}{m}f(x) \qquad (*)$$



给出的函数 $f(x)$，是以 $m\lambda$ 为周期的函数.

证明 令 $\alpha = \cos\frac{2n\pi}{m} + i\sin\frac{2n\pi}{m}$,

$$\beta = \cos\frac{2n\pi}{m} - i\sin\frac{2n\pi}{m},$$

则
$$\alpha+\beta = 2\cos\frac{2n\pi}{m},\ \alpha\beta = 1,\ \alpha^m = \beta^m = 1$$

(*)式可改写为

$$f(x+\lambda) + \alpha\beta f(x-\lambda) = (\alpha+\beta)f(x).$$

于是有

$$f(x+\lambda) - \alpha f(x) = \beta[f(x) - \alpha f(x-\lambda)], \quad ①$$

$$f(x+\lambda) - \beta f(x) = \alpha[f(x) - \beta f(x-\lambda)]. \quad ②$$

由①可得

$$\begin{aligned} & f[x+(m+1)\lambda] - \alpha f(x+m\lambda) \\ =\ & \beta\{f(x+m\lambda) - \alpha f[x+(m-1)\lambda]\} \\ =\ & \beta\cdot\beta\{f[x+(m-1)\lambda] - \alpha f[x+(m-2)\lambda]\} \\ =\ & \cdots \\ =\ & \beta^{m-1}[f(x+2\lambda) - \alpha f(x+\lambda)] \\ =\ & \beta^m[f(x+\lambda) - \alpha f(x)]. \end{aligned}$$

所以
$$f[x+(m+1)\lambda] - \alpha f(x+m\lambda) = f(x+\lambda) - \alpha f(x). \quad ③$$

同理，由②可得

$$f[x+(m+1)\lambda] - \beta f(x+m\lambda) = f(x+\lambda) - \beta f(x). \quad ④$$

③ − ④，得

$$(\beta-\alpha)f(x+m\lambda) = (\beta-\alpha)f(x). \quad ⑤$$

因为 $m > n$，且 $m \neq 2n$，所以 $\alpha - \beta = 2i\sin\frac{2n\pi}{m} \neq 0$.

故由⑤得 $f(x+m\lambda) = f(x)$.

根据周期函数定义，知 $f(x)$ 以 $m\lambda$ 为周期.

说明 由本题结论，可得一系列周期函数：

1. 若 $f(x)$ 的定义域是全体实数，已知 $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}f(x)$，则 $f(x)$ 以 8 为周期（(*)式中取 $\lambda = 1$，$m = 8$，$n = 1$）.

2. 设 $x \in \mathbf{R}$，且对任意 x 有 $f(x+2009) + f(x+2007) = f(x+2008)$，则 $f(x)$ 以



6 为周期（(*) 式中取 $\lambda=1$，$m=6$，$n=1$，得满足 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$ 的函数 $f(x)$ 以 6 为周期，以 $x+2008$ 替代上式中的 x 即可）。

3 在数列 $\{x_k\}$ 中，若存在正整数 m，使当 k 为任何正整数时，都有

$$x_k+x_{k+2m}=2\cos\frac{2}{7}\pi\cdot x_{k+m}$$

成立，则 $x_{n+7m}=x_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立。

证明 满足方程

$$f(x)+f(x+2m)=2\cos\frac{2}{7}\pi\cdot f(x+m)$$

的函数 $f(x)$，易知是以 $7m$ 为周期的周期函数。

令 $f(k)=x_k(k\in\mathbf{N}^*)$，立即得到

$$x_{n+7m}=f(n+7m)=f(n)=x_n.$$

一般地，由递推式

$$a_{n+k}+a_{n-k}=2\cos\frac{2k\pi}{m}a_n(m,k\in\mathbf{N}^*,m>k,\text{且 } m\neq 2k)$$

给出的数列 $\{a_n\}$，以 mk 为周期。

4 若 $g(x)$ 是正值函数，且对任意常数 $\lambda\neq 0$，有

$$g(x+\lambda)g(x-\lambda)=[g(x)]^{2\cos\frac{2n\pi}{m}}(n,m\in\mathbf{N}^*,m>n,\text{且 } m\neq 2n),\qquad (**)$$

则 $g(x)$ 是以 $m\lambda$ 为周期的周期函数。

证明 在 (**) 式两边取对数，并令 $f(x)=\lg g(x)$ 得

$$f(x+\lambda)+f(x-\lambda)=2\cos\frac{2n\pi}{m}f(x).$$

由例 2 结论，$f(x)$ 是以 $m\lambda$ 为周期的函数，故 $g(x)$ 也是以 $m\lambda$ 为周期的函数。

特例 设定义在实数集上的函数 $f(x)$ 的值域在正数集内，且满足条件

$$f(x+1)f(x-1)=[f(x)]^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}$$

则 $f(x)$ 是周期函数，以 10 为周期。

证明 题给方程属 (**) 型，这里 $\lambda=1$，$2\cos\frac{2n\pi}{m}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$，即 $\cos\frac{2n\pi}{m}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)=\cos\frac{2\pi}{10}$，取 $n=1$，$m=10$，由前面结论知 $f(x)$ 以 10 为周期。

一般地，在 (**) 中令 $g(k)=x_k$，$\lambda\in\mathbf{N}^*$，则可得结论：满足 $a_{k+\lambda}\cdot a_{k-\lambda}=(a_k)^{2\cos\frac{2n\pi}{m}}$



$(m>n, m\neq 2n, m、n\in \mathbf{N}^*)$的正数列$\{a_n\}$以 $2m$ 为周期.

例 6 求所有的函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 使得

$$f[f(x)+y]=f(x^2-y)+4f(x)y \quad ①$$

对所有 x、$y\in\mathbf{R}$ 成立.

解 易见 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=x^2$ 皆为上述方程①的解. 我们来证明除它们外没有其他的解.

设对某个 a, $f(a)\neq a^2$.

在①中令 $y=\frac{x^2-f(x)}{2}$, 得

$$f(x)\cdot[x^2-f(x)]=0. \quad ②$$

由于 $f(a)\neq a^2$, 故只能 $f(a)=0$. 并且可见 $a\neq 0$(否则 $a^2=0=f(a)$与 a 的定义相违).

于是我们得到, 对任意 x, 要么 $f(x)=0$, 要么 $f(x)=x^2$.

在②中令 $x=0$, 有

$$f(0)=0.$$

在①中令 $x=0$, 有

$$f(y)=f(-y).$$

在①中令 $x=a$, 并用 $-y$ 替换 y, 得

$$f(a^2+y)=f(-y)=f(y).$$

从上式可见 f 以 a^2 为周期, 进而我们有

$$f[f(x)]=f[f(x)+a^2]=f(x^2-a^2)+4f(x)a^2. \quad ③$$

在①中令 $y=0$, 有

$$f[f(x)]=f(x^2).$$

利用 $f(x)$的周期性, 得

$$f[f(x)]=f(x^2-a^2).$$

由③可得

$$4f(x)\cdot a^2=0.$$

所以 $$f(x)=0(因为 a\neq 0).$$

也就是说, 若 $f(x)\neq x^2$, 则必有 $f(x)\equiv 0$ 成立. 因此结论成立.

说明 本题求解过程利用了函数方程中隐含的解的周期性.

在初等数学和高等数学中, 用函数方程来刻画函数的性质是常有的事情, 处理竞赛



中满足函数方程的函数周期性问题需借助于巧妙的代换.

例 7 已知常数 $a>0$，使得函数 $f(x)$ 对任意实数 x 都有 $f(x)+f(x+a)+f(x)f(x+a)=1$. 试问：$f(x)$ 是否为周期函数?

分析 题设中，函数 $f(x)$ 未给出解析式，只给出了 $f(x)$ 和 $f(x+a)$ 的关系式，因此，为了判断 $f(x)$ 是否为周期函数，除了依据周期函数的定义外，很难找到别的路径. 为此，应设法判断是否存在常数 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$ 对任意实数 x 都成立. 在已知条件中以 $x+a$ 替换 x，可得

$$f(x+a)+f(x+2a)+f(x+a)f(x+2a)=1.$$

减去题设式子，整理得

$$[f(x+2a)-f(x)][1+f(x+a)]=0.$$

如能证明 $1+f(x+a)\neq 0$，则可得 $f(x)$ 为一个周期 $T=2a$ 的周期函数.

解 在题设下，对任意实数 x，都有 $f(x)\neq -1$. 否则，如果有实数 x_0，使 $f(x_0)=-1$，则由题设知

$$f(x_0)+f(x_0+a)+f(x_0)f(x_0+a)=1,$$

得 $-1=1$，与实数性质矛盾.

依设，任意实数 x，有

$$f(x)+f(x+a)+f(x)f(x+a)=1,$$

$$f(x+a)+f(x+2a)+f(x+a)f(x+2a)=1,$$

故

$$[f(x)-f(x+2a)][1+f(x+a)]=0.$$

由前面所证，可知 $f(x+a)\neq -1$，即 $1+f(x+a)\neq 0$，从而

$$f(x)-f(x+2a)=0,$$

即对任意实数 x，都有

$$f(x+2a)=f(x),$$

根据定义得函数 $f(x)$ 是周期函数，它有周期 $T=2a$.

说明 本例解答中开头一段用反证法证明的论断是解答本题的基础，论断的提出和证明，来源于对题目的认真审读和思考，所依靠的是对函数概念及其符号表示的熟练掌握. 全题的讨论，应突出 x 的任意性.

例 8 对于函数 $f(x)$，若存在两组实数 a_1，b_1；a_2，b_2（$a_1+b_1\neq a_2+b_2$），使得对函数定义域内的任意 x，都有

(1) $f(a_1+x)=f(b_1-x)$，$f(a_2+x)=f(b_2-x)$，



或

(2) $f(a_1+x)=-f(b_1-x)$，$f(a_2+x)=-f(b_2-x)$，

则 $f(x)$ 为周期函数，且 $|(a_2+b_2)-(a_1+b_1)|$ 为其一正周期.

证明 (1)
$$\begin{aligned}f[x+(a_2+b_2)-(a_1+b_1)]&=f[a_2+(x+b_2-a_1-b_1)]\\&=f[b_2-(x+b_2-a_1-b_1)]\\&=f[a_1+(-x+b_1)]\\&=f[b_1-(-x+b_1)]\\&=f(x).\end{aligned}$$

同理，$f[x+(a_1+b_1)-(a_2+b_2)]=f(x)$.

所以 $f(x)$ 为周期函数，$|(a_2+b_2)-(a_1+b_1)|$ 为其一正周期.

(2)
$$\begin{aligned}f[x+(a_2+b_2)-(a_1+b_1)]&=f[a_2+(x+b_2-a_1-b_1)]\\&=-f[b_2-(x+b_2-a_1-b_1)]\\&=-f[a_1+(-x+b_1)]\\&=f[b_1-(-x+b_1)]\\&=f(x).\end{aligned}$$

同理，$f[x+(a_1+b_1)-(a_2+b_2)]=f(x)$.

所以 $f(x)$ 是周期函数，$|(a_2+b_2)-(a_1+b_1)|$ 为其一正周期.

说明 满足(1)的函数常称为关于 $l_1(a_1,b_1)$、$l_2(a_2,b_2)$ 的广义偶函数，满足(2)的函数则称为关于 l_1、l_2 的广义奇函数

能力训练

1. (2006年高考数学(安徽理科)试题)函数 $f(x)$ 对于任意 x 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$，则 $f[f(5)]$ 的值为 ( )

A. -5　　B. 5　　C. $-\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+1)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$，且 $f(-1)=\dfrac{1}{2}$，则 $f(2007)$ 的值为 ( )

A. -1　　B. 1　　C. 2007　　D. $\dfrac{1}{2}$



3. (2005年湖南省竞赛题)对于 $x\in\mathbf{R}$,函数 $f(x+2)+f(x-2)=f(x)$,则它是周期函数,函数的一个周期是 ( )

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

4. (2007年江西省高考题)设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上以 5 为周期的可导偶函数,则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=5$ 处的切线的斜率为 ( )

A. $-\frac{1}{5}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{5}$　　D. 5

5. (2007年安徽省高考题)定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数,又是周期函数,T 是它的一个正周期.若将方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-T,T]$ 上的根的个数记为 n,则 n 可能为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 5

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,且对任意的 x、$y\in\mathbf{R}$,有 $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$ 成立,又知 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$,但 $f(x)$ 不恒为 0,且 $f(0)>0$,则 $f(x)$ 为周期函数,它的一个正周期为 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3}{4}\pi$　　D. π

7. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 及 $y\neq0$,$f(x+y)=f\left(xy-\frac{x}{y}\right)$,且 $f(x)$ 为周期函数,则它的一个正周期为______.

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,且满足 $f(x+2)[1-f(x)]=1+f(x)$,$f(1)=9997$,则 $f(2009)$ 的值为______.

9. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上且最小正周期为 T 的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$ 和 $f(8+x)=f(8-x)$,则 T 的最大值是______.

10. 对任意 $x\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x+2008)=f(x+2007)+f(x+2009)$,且 $f(1)=\lg\frac{3}{2}$,$f(2)=\lg15$,则 $f(2007)$ 的值是______.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,对任意实数 x,恒有 $f(1+x)=f(3-x)$,且 $f(2+x)=-f(4-x)$,则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=$______.

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域是全体实数,且 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$,则可判断 $f(x)$ 的周期性为______.

13. 证明:对于函数 $f(x)$,若存在两组实数 a_1、b_1;a_2、b_2($a_1+b_1\neq a_2+b_2$),使得对函数定义域内的任意 x,都有

$$f(a_1+x)=f(b_1-x),f(a_2+x)=f(b_2-x),$$



则 $f(x)$ 为周期函数，且 $2|(a_2+b_2)-(a_1+b_1)|$ 为其一正周期。

14. 已知 $x\in\mathbf{R}$，a 为常数，且 $f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，问：$f(x)$ 是不是周期函数？若是，求出一个周期；若不是，说明理由。

15. 设 f 是一个从实数集 $\mathbf{R}$ 映射到自身的函数，并且对任何 $x\in\mathbf{R}$，均有 $|f(x)|\leqslant 1$，以及 $f\left(x+\dfrac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\dfrac{1}{6}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{7}\right)$。求证：$f(x)$ 是周期函数，即存在一个非零实数 c，使得对任何 $x\in\mathbf{R}$，$f(x+c)=f(x)$ 成立。



第2讲　周期函数的最小正周期

1　求函数最小正周期的基本方法

知识扫描

求周期函数的最小正周期的基本方法有：定义法、公式法、图像法、检验法、求导法等，下面逐个举例说明。

例题分析

（Ⅰ）定义法

如果对于定义域内的任一自变量 x，都存在非零常数 T，使 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，那么 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期．通常我们求周期是求它的最小正周期．

例1　根据周期函数的定义求下列函数的最小正周期：

（1）$f(x)=|\sin x|+|\cos x|$；

（2）$f(x)=\tan\frac{2x}{3}$．

解　（1）根据周期函数的定义，周期 T 是使函数值重复出现的自变量 x 的增加值，问题是要找到一个最小正数 T，对于函数定义域内的每一个 x 值都能使 $f(x+T)=f(x)$ 成立．

设最小正周期为T，则对一切$x\in\mathbf{R}$，有$|\sin(x+T)|+|\cos(x+T)|=|\sin x|+|\cos x|$，令$x=0$时有$|\sin T|+|\cos T|=1$，两边平方得$|\sin 2T|=0$，所以$T=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$。当$T=\frac{\pi}{2}$时，对一切$x\in\mathbf{R}$，有$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|$，进一步可用反证法证明$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$.

(2) 根据周期函数的定义，就是要找到一个最小正数T，对于函数定义域内的每一个x值都能使$f(x+T)=f(x)$恒成立，同时考虑到正切函数$y=\tan x$的周期是π.

由于
$$\tan\frac{2x}{3}=\tan\left(\frac{2x}{3}+\pi\right)=\tan\frac{2}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$
即$f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\tan\frac{2}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\tan\frac{2x}{3}=f(x)$恒成立，也可以验证$\frac{3\pi}{2}$是符合条件的最小正数，所以函数$y=\tan\frac{2x}{3}$的最小正周期是$\frac{3\pi}{2}$.

说明 利用定义是求函数周期的重要方法之一.

(Ⅱ)公式法

我们已经知道：函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega\neq0)$的最小正周期是$\frac{2\pi}{\omega}$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的最小正周期也是$\frac{2\pi}{\omega}$，函数$y=A\tan(\omega x+\varphi)$的最小正周期是$\frac{\pi}{\omega}$. 因此对能化为类似于这种三角函数形式的，均可考虑利用公式来求它们的最小正周期，请看以下例题.

例2 (2006年江西高考题) 已知向量$\boldsymbol{a}=\left(2\cos\frac{x}{2},\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$，令$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求函数$f(x)$的最大值、最小正周期，并写出$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调区间.

分析 求解此例的关键是将表达式化为以上所列的简单三角函数形式之一. 根据本例的结构特征，考虑复角化单角、正切化正余弦的思想方法.

解 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{1+\tan\frac{x}{2}}$$

$$=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1$$



$=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小正周期为 2π，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

说明 学了三角函数后，不少人认为正弦型函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in M)$ 一定是周期函数，但事实并非如此.

① 当 M 是有限区间，如 $[0,3\pi]$ 时，$f(x)$ 显然不是周期函数，因为周期函数的定义域至少一端应是无界的.

② 当 M 是无限区间时，$f(x)$ 也不一定是周期函数，如：

$f(x)=\sin x$，$x\in M$，$M=\{x\mid x=2^n,n\in\mathbf{N}\}$，原因是 M 不是周期域.

③ 当 M 是周期域时，$f(x)$ 也不一定是周期函数，如：

$$f(x)=\sin x,x\in M(=\mathbf{Z})$$

$f(x)=\sin x$ 的固有周期为 $T_1=2\pi$，$M=\mathbf{Z}$ 的周期是 $T_2=1$，而 $T_1/T_2=2\pi$（无理数），由于它们不合拍，所以 $f(x)$ 一定不是周期函数.

④ $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R})$ 的最小正周期是 $T_1=\frac{2\pi}{\omega}$，M 的最小正周期是 T_2，当 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi}{\omega T_2}$ 是有理数时，$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in M)$ 是周期函数，T_1、T_2 的最小公倍数是 $f(x)$ 的一个周期.

（Ⅱ）图像法

有些函数周期不是很容易看出来，却又不具备使用公式的条件，若利用定义求其周期又比较麻烦，此时不妨考虑利用图像（不一定要画出）来求周期.

例 3 函数 $f(x)$ 定义在实数集上，且对一切实数 x 满足等式 $f(2+x)=f(2-x)$ 和 $f(7+x)=f(7-x)$，设 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 的一个根，记 $f(x)=0$ 在区间 $-1000\leqslant x\leqslant 1000$ 中的根的个数为 N，求 N 的最小值.

解 由 $f(2+x)=f(2-x)$，可知函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，而 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 的一个根，故 $x=4$ 也是 $f(x)$ 的一个根. 又由 $f(7+x)=f(7-x)$，可知函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=7$ 对称，故 $x=10$ 也是方程 $f(x)=0$ 的根. 这样在区间 $[2,7]$ 至少有一个根 $x=4$. 假若 $y=f(x)$ 在区间 $[2,7]$ 的图像是如图 2-1 所示的一条曲线段，则根据函数 $y=f(x)$ 的图像

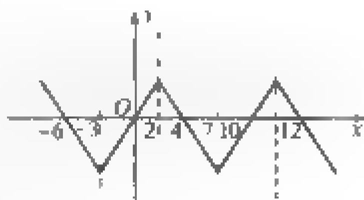


图 2-1

关于直线 $x=2$ 及直线 $x=7$ 对称，可得到函数 $y=f(x)$ 在区间[-3，2]及[7，12]的图像.由此可进一步推知，函数 $y=f(x)$ 的图像具有周期性，其周期为10，且在一个周期内方程 $f(x)=0$ 至少有2个根，区间[-1000，$+1000$]是 $f(x)$ 的200个周期，因此在区间[-1000，$+1000$]上，$f(x)=0$ 至少有 $1+200\times2=401$ 个根.

说明 此例也可根据已知条件与周期性定义推出函数 $y=f(x)$ 的周期，进而求得方程 $f(x)=0$ 根的最少个数.

例4 求函数 $y=\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1\right|$ 的最小正周期.

分析 从给出的函数式结构特征上看，其周期不很明了，甚至可能产生误解，若用特殊值去检验又觉得难以确定.然而此函数的图像却是比较容易画出来的.像这种函数求周期还是图像法更为准确、简便.

解 函数 $y=\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1\right|$ 的图像可经过如下变换得到：先将函数 $y=\sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，再将曲线上所有点的纵坐标伸长到原来的2倍（横坐标不变），然后将所得图像向上平移1个单位，最后把在 x 轴下方的图像沿 x 轴反折到 x 轴上方.图像如图2-1-2所示，观察图像可知该函数的最小正周期为 2π.

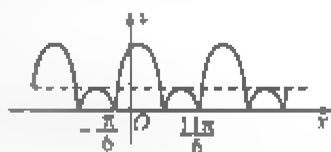


图2-1-2

（Ⅳ）检验法

若已知函数 $f(x)$ 的正周期的一个范围，则可逐个从小到大代入已知函数进行检验，所得最小的正周期即为所求.这一方法特别适用于解某些选择题.下面几题就是用这一方法求解的.

例5 （第1届"希望杯"高一竞赛题）函数 $f(x)=|\tan2x|$ 的最小正周期是（　　）

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

解 若 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期，则对定义域内任意的 x，均有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，即

$$|\tan2(x+T)|=|\tan2x| \quad ①$$

由于要求的是函数 $f(x)$ 的最小正周期，且四个选择支中已限定最小正周期的取值范围：2π，π，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}$ 之一，我们可按照从小到大次序代入①中检验：

当 $T=\frac{\pi}{4}$ 时，①式即 $\left|\tan2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=|\tan2x|$，$|\cot2x|=|\tan2x|$，不恒成立，如



$x=\frac{\pi}{6}$，因此$\frac{\pi}{4}$不是 $f(x)$的周期.

当 $T=\frac{\pi}{2}$时，①式即$\left|\tan2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\tan2x|$，$|\tan2x|=|\tan2x|$恒成立，因此$\frac{\pi}{2}$是$f(x)$最小的正周期，故选 C.

评析 函数的周期性问题，是中学数学中的重要内容，每年的高考和数学竞赛中都有大量的此类试题出现. 但如何根据已知函数的特点，寻找求其最小正周期的简便方法，则是一个难点.

思考 从本题结论可见，一个函数加绝对值后，其最小正周期可能与原函数相同. 那么，是否所有的函数加绝对值后，最小正周期都与原函数相同呢？

不一定，结果是五花八门的. 下面列出几类：

(1) 如函数 $f(x)=|\sin x|$，它的最小正周期 π 是原函数 $g(x)=\sin x$ 的最小正周期 2π 的一半.

(2) $f(x)=\sin|x|$ 是非周期函数，但 $f(x)=|\sin|x||$ 的最小正周期为 π.

(3) 狄利克雷型函数 $D(x)=\begin{cases}-1, & (\text{当 } x \text{ 是有理数时})\\ 1, & (\text{当 } x \text{ 是无理数时})\end{cases}$ 是非周期函数，但 $|D(x)|$ 是周期函数，但没有最小正周期.

因此，一个函数加绝对值后函数周期性的变化，应根据具体情况进行分析.

此题也可用如下的图像法求解.

解 作出函数的大致图像，如图 2－1－3，可知它的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$，故选 C.

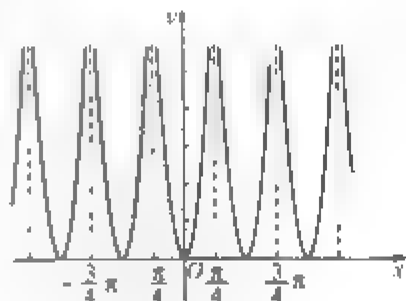


图 2－1－3

(Ⅴ) 恒等变换法

例 6 求下列函数的最小正周期：

(1) $y=\cos^4x+\sin^4x$；

(2) $y=2\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cdot\cos x$

分析 这两个函数式中和差积均有，不能直接利用公式，利用定义也较困难. 遇到这样的问题，首先要经过恒等变形，将已知函数尽量化为只含有一个三角函数的式子，然后利用公式求最小正周期.

解 (1) $y=(\cos^2x+\sin^2x)^2-2\cos^2x\sin^2x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^22x$$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos4x).$$

故最小正周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

(2) $y=2\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$

$$=\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

故最小正周期 $T=\pi$.

例7 函数 $f(x)=\frac{\sin x+\sin3x}{\cos x+\cos3x}$ 的最小正周期是 ( )

A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{\pi}{4}$ D. 2π

解 因为 $\frac{\sin x+\sin3x}{\cos x+\cos3x}=\frac{2\sin2x\cos x}{2\cos2x\cos x}=\tan2x$,

所以 $f(x)=\tan2x$.

又因 $\tan2x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$,所以选 A.

解答错了!错在哪里?

剖析 容易否定 $\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的最小正周期.因为若 $\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的最小正周期,则根据周期函数的定义,知 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$ 对 $f(x)$ 定义域内的任意一个 x 都成立,$x=0$ 在定义域内,但 $0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ 却不在定义域内,更谈不上 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)$ 了.因此 $\frac{\pi}{2}$ 不是函数的最小正周期.问题出在哪里呢?出在函数 $f(x)=\frac{\sin x+\sin3x}{\cos x+\cos3x}$ 与 $g(x)=\tan2x$ 不是同一个函数!因为它们的定义域不相同($f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}\}$,而 $g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}\}$).因此,不能根据 $g(x)=\tan2x$ 的周期来确定 $f(x)$ 的周期.由于这类题目用其他方法较难求解,我们可以借助图像来解答.

解 可求得 $f(x)=\tan2x\left(x\in\mathbf{R},且\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right)$,如图2-1-4,作出此函数的图像,从图像可以看出,函数的最小正周期为 π(如从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段图像即



区间长度为一个周期 π 上的一段图像).

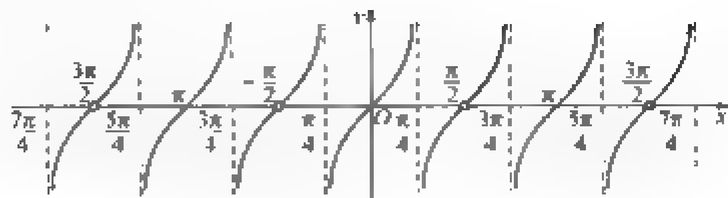


图 2-1-4

(Ⅵ) 求导法

根据周期函数定义,$f(x+T)=f(x)$ 对 $f(x)$ 定义域内任一 x 成立.通过对 $f(x+T)=f(x)$ 两边求导,求得最小正周期的方法称为求导法.

例 8 设 $g_i(x)=a_i\sin(\omega_i x+\theta_i)$,这里 $a_i\omega_i\neq 0(i=1,2)$,且 $|\omega_1|\neq|\omega_2|$,则当 $f(x)=g_1(x)+g_2(x)$ 为周期函数时,必有 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 为有理数.

证明 在等式 $f(x+T)=f(x)$,即

$$g_1(x+T)+g_2(x+T)=g_1(x)+g_2(x),\quad ①$$

两边关于 x 求导两次得

$$(-\omega_1^2)g_1(x+T)+(-\omega_2^2)g_2(x+T)=(-\omega_1^2)g_1(x)+(-\omega_2^2)g_2(x).\quad ②$$

由于 $|\omega_1|\neq|\omega_2|$,联立①、②容易得到

$$g_1(x+T)=g_1(x),\quad g_2(x+T)=g_2(x).$$

这说明函数 $g_1(x)$、$g_2(x)$ 有公共周期,故存在 $n,m\in\mathbf{N}^*$,有

$$T=n\cdot\frac{2\pi}{|\omega_1|}=m\cdot\frac{2\pi}{|\omega_2|},\text{所以}\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m}{n}\text{或}-\frac{m}{n}(\text{有理数}).$$

评析 一般地,用求导法可以证明:当 $\omega_i\neq\omega_j(i\neq j)$ 且 $\frac{\omega_i}{\omega_j}=$ 有理数,$a_i\neq 0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时,$\sum_{i=1}^{n}a_i\sin(\omega_i x+\varphi_i)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega_1|}$、$\frac{2\pi}{|\omega_2|}$、…、$\frac{2\pi}{|\omega_n|}$ 的最小公倍数.



能力训练

1. (2007 年全国高中数学联赛江苏赛区初赛试题)已知函数 $y=\sin^2 x$,则该函数



A. 有最小正周期 2π　　　　B. 有最小正周期 π

C. 有最小正周期 $\frac{\pi}{2}$　　　　D. 无最小正周期

2. 函数 $y=\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)$ 的最小正周期为　　( )

A. π　　B. 2π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$

3. (2004天津市高考理科试题)函数 $y=\sin^4x+\cos^2x$ 的最小正周期为　　( )

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

4. (第7届"希望杯"高二竞赛题)若函数 $y=\left|\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-1\right|$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$，那么正数 ω 的值是　　( )

A. 8　　B. 4　　C. 2　　D. 1

5. (第7届"希望杯"高一竞赛题)函数 $y=|\sin x\cos x|$ 的最小正周期是　　( )

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. 不存在

6. (第9届"希望杯"高二竞赛题)以 T_1、T_2、T_3 分别表示函数 $\tan\frac{x}{\sqrt{2}}$、$|\cos x|$、$\sin\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\right)$ 的最小正周期，那么　　( )

A. $T_1<T_2<T_3$　　　　B. $T_3<T_2<T_1$

C. $T_2<T_1<T_3$　　　　D. $T_2<T_3<T_1$

7. 图2-1-5表示周期函数 $y=f(x)$ 的变化规律，由图像可以观察出 $f(x)$ 的最小正周期是______.

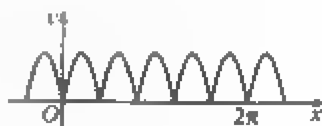


图2-1-5

8. (2007年上海市高考题)函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为______.

9. 函数 $f(x)=\frac{\cot x+\cos x}{1+\sin x}$ 的最小正周期为______.

10. (2004年高考全国卷试题)函数 $f(x)=\frac{\sin^4x+\cos^4x+\sin^2x\cos^2x}{2-\sin 2x}$ 的最小正周期为______.

11. (2005年湖北高考题)函数 $y=|\sin x|\cos x-1$ 的最小正周期与最大值的和为______.



12. 函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ 的最小正周期为________.

13. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos x+a$ ($a\in\mathbf{R}$, a 为常数).

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 的最大值为 1,求 a 的值.

(Ⅲ) 若 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 1,求 a 的值

14. 设三角函数 $f(x)=\sin\left(\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}\right)$ $(k\neq 0)$.

(1) 写出 $f(x)$ 的极大值 M、极小值 m 与最小正周期 T;

(2) 试求最小正整数 k,使得当自变量 x 在任意两个整数间(包括整数本身)变化时,函数 $f(x)$ 至少有一个值是 M,另一个值是 m.

15. (第 12 届"希望杯"高一竞赛题)已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的最小正周期 $T=5$ 的函数,在 $[0,1]$ 上是一次函数,在 $[-1,1]$ 上图像关于原点对称,在 $[1,4]$ 上为二次函数,且在 $x=2$ 时函数取得最小值 -5. 试求 $y=f(x)$ 的解析式



2　求函数最小正周期的特殊方法

知识扫描

求函数最小正周期的特殊方法，常用的有：等周期法、猜想证明法、结构类比法、单位圆法、奇偶函数法、最小公倍数法、极限法等.

例题分析

(Ⅰ) 等周期法

理论依据是：若对于任意的 $x\in M$，都有

$$g(x+T)=g(x)\Leftrightarrow f(x+T)=f(x),$$

且函数 $f(x)$ $(x\in M)$ 的最小正周期为 T，则函数 $g(x)$ $(x\in M)$ 的最小正周期也为 T.

例1　求函数 $f(x)=\dfrac{2\sin x+1}{3\sin x-5}$ 的最小正周期 T.

解　因为 $\dfrac{2\sin x+1}{3\sin x-5}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{13}{3(3\sin x-5)}$，

所以 $f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}+\dfrac{13}{3[3\sin(x+T)-5]}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{13}{3(3\sin x-5)}$

$$\Leftrightarrow \sin(x+T)=\sin x.$$

由此可知 $f(x)$ 与 $y=\sin x$ 的最小正周期均为 $T=2\pi$.

说明　这一方法看似简单，却能非常方便地求出一大批较复杂函数的最小正周期.如

(1) 函数 $f(x)=\sqrt[n]{1-\sqrt[k]{1-\cos ax}}$ $(n,k\in\mathbf{N}^*$，a 为非零实数) 的最小正周期为

$\frac{2\pi}{a}$.

证明 由 $f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\cos a(x+T)=\cos ax$,知 $f(x)$ 与函数 $y=\cos ax$ 最小正周期相同,均为 $\frac{2\pi}{|a|}$.

(2) 函数 $y=\sin^n x(x\in\mathbf{R})$ 当 n 为偶数时,周期为 $k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,最小正周期为 π;当 n 为奇数时,周期为 $2k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,最小正周期为 2π.

证明 易证 $y=\sin^n x(x\in\mathbf{R})$ 是周期函数(显然 2π 为其一个周期).

设 $k(k\neq0)$ 为 $y=\sin^n x(x\in\mathbf{R})$ 的周期.

由周期定义知 $\sin^n x=\sin^n(x+k)(x\in\mathbf{R})$. ①

当 n 为奇数时,①成立的充要条件为 $\sin x=\sin(x+k)(x\in\mathbf{R})$.

即 $k=2m\pi(m\in\mathbf{Z},m\neq0)$,最小正周期为 2π.

所以,当 n 为奇数时,$y=\sin^n x(x\in\mathbf{R})$ 的周期为 $2m\pi(m\in\mathbf{Z},m\neq0)$,最小正周期为 2π.

当 n 为偶数时,①成立的充要条件为 $|\sin x|=|\sin(x+k)|(x\in\mathbf{R})$.

所以,当 n 为偶数时,$y=\sin^n x(x\in\mathbf{R})$ 的周期为 $m\pi(m\in\mathbf{Z},m\neq0)$,最小正周期为 π.

(3) 函数 $y=\cos^n x(x\in\mathbf{R})$,当 n 为偶数时,周期为 $k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,最小正周期为 π;当 n 为奇数时,周期为 $2k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,最小正周期为 2π.

与(2)同理可证(3)成立.

推广 (1) 函数 $y=A\sin^n(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R},A\omega\neq0,A,\omega,\varphi$ 为常数).

当 n 为奇数时,周期为 $\frac{2k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$;

当 n 为偶数时,周期为 $\frac{k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$.

(2) 函数 $y=A\cos^n(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R},A\cdot\omega\neq0,A,\omega,\varphi$ 为常数),

当 n 为奇数时,周期为 $\frac{2k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$;

当 n 为偶数时,周期为 $\frac{k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$.

(Ⅱ) 猜想证明法

有些三角函数的最小正周期用常规方法很难求,这时可根据函数的结构猜想出其最小正周期,并验证该数是函数的周期,再证明它是函数的最小正周期.

例 2 求函数 $y=\cos(\sin x)$ 的最小正周期.

解 因为 $\cos[\sin(x+\pi)]=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)$,



所以 π 是函数的一个周期.

假设 T 是函数的最小正周期,且 $0<T<\pi$,那么对一切实数 x,都有 $\cos[\sin(x+T)]=\cos(\sin x)$ 成立.

令 $x=0$,得 $\cos(\sin T)=1$,即 $\sin T=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\sin T|\leqslant 1$,只能 $k=0$,即 $\sin T=0$.

所以 $T=n\pi(n\in\mathbf{Z})$,这与 $0<T<\pi$ 矛盾.因此函数 $y=\cos(\sin x)$ 的最小正周期不能小于 π.

所以,$y=\cos(\sin x)$ 的最小正周期是 π.

说明 也可用等周期法求解.由于 $\cos u=\cos|u|$,而函数 $f(u)=\cos u$ 在 $u\in[0,1]$ 上单调下降,所以

$$\begin{aligned}&\cos[\sin(x+T)]=\cos(\sin x)\\ \Leftrightarrow&\cos|\sin(x+T)|=\cos|\sin x|\\ \Leftrightarrow&|\sin(x+T)|=|\sin x|.\end{aligned}$$

可见 $y=\cos(\sin x)$ 与 $y=|\sin x|$ 最小正周期相同,均为 π.

一般地,可证:$y=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}} x$,$y=\cos(\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}} x)$,$y=\underbrace{\cos\cos\cdots\cos}_{n\text{个}} x$ 最小正周期分别为 $2\pi,\pi,\pi$.

(Ⅱ)结构类比法

例 3 已知函数 $y=f(x)$ 的图像在 $\mathbf{R}$ 上关于点 $A(a,y_0)$ 及点 $B(b,y_0)$ 对称,且在区间 (a,b) 内再无对称点,求函数 $y=f(x)$ 的最小正周期.

解 回想学过的有最小正周期的且图像关于点对称的函数,联想到正弦函数 $y=\sin x$ 图像关于两相邻点 $A(0,0)$,$B(\pi,0)$ 对称,这两点横坐标之差 $\pi-0=\pi$ 的 2 倍,即 2π 是 $\sin x$ 的最小正周期.进行类比猜想:$2(b-a)$ 是函数 $y=f(x)$ 的最小正周期.

下面证明 $2(b-a)$ 是函数 $y=f(x)$ 的最小正周期.

因为 $y=f(x)$ 的图像关于点 $A(a,y_0)$ 对称,所以 $y=f(x)$ 的图像上任意一点 $P_1(a-x,f(a-x))$ 关于 $A(a,y_0)$ 的对称点 P_2 必在 $y=f(x)$ 的图像上.故 P_2 点坐标为:$P_2((a+x),f(a+x))$.于是 $f(a-x)+f(a+x)=2y_0$,即

$$f(a-x)=2y_0-f(a+x).$$

同理可证:$f(b-x)=2y_0-f(b+x)$.

所以 $$\begin{aligned}f[2(b-a)+x]&=f[b+(b-2a+x)]=2y_0-f(2a-x)\\&=2y_0-f[a+(a-x)]=f(x).\end{aligned}$$

故 $T=2(b-a)$ 是 $y=f(x)$ 的一个正周期.



若函数 $y=f(x)$ 有正周期 T^* $(0<T^*<2(b-a))$，令 $a'=\frac{2b-T^*}{2}$，显然有 $a<a'<b$.

这时有：
$$
\begin{aligned}
f(a'+x) &= f\left(b-\frac{T^*}{2}+x\right)\\
&= 2y_0-f\left[b-\left(x-\frac{T^*}{2}\right)\right]\\
&= 2y_0-f\left(b-x+\frac{T^*}{2}\right)\\
&= 2y_0-f\left[(b-x)+\frac{T^*}{2}\right]\\
&= 2y_0-f\left[\left(b-\frac{T^*}{2}\right)-x\right]\\
&= 2y_0-f(a'-x).
\end{aligned}
$$
所以 $f(a'+x)=2y_0-f(a'-x)$，即 $y=f(x)$ 的图像关于点 (a',y_0) 对称，这与已知条件矛盾，故 $T=2(b-a)$ 是函数 $y=f(x)$ 的最小正周期.

（Ⅳ）单位圆法

在对三角函数的转换过程中，常发生函数的定义域出现变化的情形，即通常所说的非恒等变形，此时可利用单位圆先求出函数变换前后定义域的"最小正周期"，那么变换后函数的最小正周期与定义域的"最小正周期"的最小公倍数即为该函数的最小正周期.

例 4 求函数 $y=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ 的最小正周期.

分析 常规的解法是利用万能公式的逆运算，把函数转化为 $y=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\tan 2x$，不考虑定义域因素，其最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

但如果再深入分析便可知，$y=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\tan 2x$ 的定义域是非等价变换的，原函数的最小正周期是否还是 $\frac{\pi}{2}$ 呢？这就需要我们确定原函数转换前后的定义域的"最小正周期"．可利用单位圆将其定义域表示出来（空点表示非定义域）.

$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ 的定义域是 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 且 $x\neq\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，用单位圆表示如图 2－2－1，其定义域的"最小正周期"为 π；$\tan 2x$ 的定义域是 $x\neq\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，用单位圆表示如图 2－2－2，其定义域的"最小正周期"为 $\frac{\pi}{2}$.



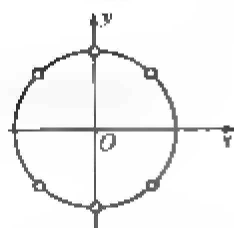


图 2-2-1

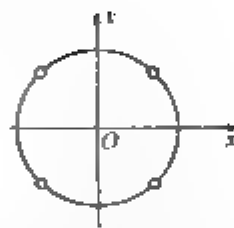


图 2-2-2

$\frac{\pi}{2}$、π 和 $\frac{\pi}{2}$ 的最小公倍数是 π，故原函数的最小正周期是 π.

说明 例 4 提醒我们：①用三角变换去求三角函数的最小正周期时，一定要注意转换前后定义域的变化．如果定义域不变，可直接求出其最小正周期；如果定义域改变，则用单位圆法去求；②运用定义、公式、定理解题时，一定要注意其成立的前提条件及隐含条件，以防止非等价变换而造成误解．

（Ⅴ）奇偶函数法

依据是：在公共定义域 D 上，奇函数 $f_1(x)$ 的最小正周期为 T_1，偶函数 $f_2(x)$ 的最小正周期为 T_2，且 $\frac{T_2}{T_1}$ = 有理数，则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 的最小正周期是 T_1、T_2 的最小公倍数．

证明 由已知 $\frac{T_2}{T_1}$ = 有理数，我们可设 $T_1=pa$，$T_2=qa$，这里 $p,q\in\mathbf{N}^*$，且 $(p,q)=1$，$a\in\mathbf{R}^+$．

对于任意的 $x\in D$，有

$$f(x+pqa)=f_1(x+pqa)+f_2(x+pqa)=f_1(x+qT_1)+f_2(x+pT_2)$$
$$=f_1(x)+f_2(x)=f(x)，$$

故 $f(x)$ 是周期函数，T_1、T_2 的最小公倍数 pqa 是它的一个周期．

再设 $T(\neq 0)$ 是 $f(x)$ 的任一周期，那么对于任意的 $x\in D$，都有 $x+T\in M$，且 $f(x+T)=f(x)$，即

$$f_1(x+T)+f_2(x+T)=f_1(x)+f_2(x). \quad ①$$

由于集 D 是奇偶函数的定义域，必对称于原点，故也有 $-(x+T)\in D$．用 $-(x+T)$ 替代 ① 中的 x，得到

$$f_1(-x)+f_2(-x)=f_1[-(x+T)]+f_2[-(x+T)]$$

根据 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的奇偶性，由上式可得到



$$f_1(x)+f_2(x)=f_1(x+T)+f_2(x+T).\qquad ②$$

① + ② 可得到

$$f_1(x+T)=f_1(x),\ f_2(x+T)=f_2(x).$$

这表明 $f(x)$ 的周期 T 一定是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的公共周期. 而在 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的公共正周期中,最小的是 T_1、T_2 的最小公倍数 pqa. 这就证明了 T_1、T_2 的最小公倍数是 $f(x)$ 的最小正周期.

根据上面结论,大量较复杂函数的最小正周期可十分方便地求出,略举数例.

例 5 (1) 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{\sin\frac{3}{2}x}-\sqrt{\cos\frac{2}{3}x}$ 的最小正周期.

(2) 求函数 $f(x)=2\sin3x+3|\sin4x|$ 的最小正周期.

解 (1) 对于任意 $T(\neq0)$, $\sqrt[3]{\sin\frac{3}{2}(x+T)}=\sqrt[3]{\sin\frac{3}{2}x}\Leftrightarrow\sin\frac{3}{2}(x+T)=\sin\frac{3}{2}x$,

$$-\sqrt{\cos\frac{2}{3}(x+T)}=-\sqrt{\cos\frac{2}{3}x}\Leftrightarrow\cos\frac{2}{3}(x+T)=\cos\frac{2}{3}x,$$

故奇函数 $f_1(x)=\sqrt[3]{\sin\frac{3}{2}x}$ 的最小正周期 $T_1=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\pi$,偶函数 $f_2(x)=\sqrt{\cos\frac{2}{3}x}$ 的最小正周期 $T_2=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$,故 $f(x)$ 的最小正周期是 T_1、T_2 的最小公倍数 12π.

(2) 奇函数 $f_1(x)=2\sin3x$ 的最小正周期 $T_1=\frac{2}{3}\pi$,偶函数 $f_2(x)=3|\sin4x|$ 的最小正周期 $T_2=\frac{\pi}{4}$,故 $f(x)$ 的最小正周期为 T_1、T_2 的最小公倍数 2π.

说明 应用上述结论不仅可以求出奇偶函数之和的最小正周期,通过平移变换还可求出可化为奇偶函数之和的周期函数的最小正周期. 如:

求 $f(x)=(\sin x)^{2006}+(\cos x)^{2007}$ 的最小正周期.

解 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=(\cos x)^{2006}+(\sin x)^{2007}$,易知 $f_1(x)=(\sin x)^{2007}$ 为奇函数,且 $f_1(x+T)=f_1(x)\Leftrightarrow\sin(x+T)=\sin x$,所以 $f_1(x)$ 与 $\sin x$ 最小正周期相同,均为 $T_1=2\pi$;$f_2(x)=(\cos x)^{2006}$ 为偶函数,且 $f_2(x+T)=f_2(x)\Leftrightarrow|\cos(x+T)|=|\cos x|$,所以 $f_2(x)$ 与 $|\cos x|$ 周期相同,它们的最小正周期均为 $T_2=\pi$. 故 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最小正周期为 T_1、T_2 的最小公倍数 2π. 又 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最小正周期相同,故 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.



般地，$f_i(x)$ 表示六个基本三角函数($\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$)之一，$f(x)=af_i^{2n}(x)+b\cos^{2m}x(n,m\in\mathbf{N}^*,ab\neq 0)$ 的最小正周期为 2π。

注意：求 T_1、T_2 时，一定要注意到 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的定义域是公共定义域 D，否则结论不保证成立。

反例 设 $n\in\mathbf{Z}$，奇函数 $f_1(x)=\sin\pi x,x\neq 2n$，偶函数 $f_2(x)=\begin{cases}0,x\neq 4n\\1,x=4n\end{cases}$，则 $T_1=2,T_2=4$，T_1、T_2 的最小公倍数为 4，但 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\sin\pi x,x\neq 2n$，最小正周期 $T=2$。

原因何在？原因就在于求 T_2 时，$f_2(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，而不是 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的公共定义域 $D=\{x\mid x\neq 2n,n\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\}$，事实上，$f_2(x)(x\in D)$ 的最小正周期 $T_2=2$。

(Ⅵ) **最小公倍数法**

在实际的解题过程中，求形如 $y=f_1(x)+f_2(x)$(其中 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 都是正弦或余弦型的周期函数)的最小正周期时，有时很难把它化为我们所熟悉的、能够直接运用公式的形式，这时，我们可考虑能否采用最小公倍数的方法来解决问题。方法依据：

设 $f_1(x)$ 的最小正周期是 T_1，$f_2(x)$ 的最小正周期是 T_2，则函数 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 的一个周期为 $T=p_1T_1=p_2T_2$(其中 $p_1,p_2\in\mathbf{N}^*$，且 p_1,p_2 互质)。

证明 因为 $f(x+p_1T_1)=f_1(x+p_1T_1)+f_2(x+p_2T_2)$

$=f_1(x+p_2T_2)+f_2(x+p_1T_1)$

$=f_1(x)+f_2(x)=f(x)$，

所以 p_1T_1 是 $f(x)$ 的一个周期，同理可证 p_2T_2 也是 $f(x)$ 的一个周期。

注 ① $T=p_1T_1=p_2T_2$ 不一定是 $f(x)$ 的最小正周期，如猜测是最小正周期，还要用反证法加以证明。

② 分数的最小公倍数的求法：

$$\frac{\text{各分数分子的最小公倍数}}{\text{各分数分母的最大公约数}}$$

例 6 求函数 $y=4\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期。

解 因为 $4\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T_1=\frac{2\pi}{3}$，$3\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T_2=\frac{2\pi}{3}$，

而 T_1、T_2 的最小公倍数是 $\frac{2\pi}{3}$，

所以函数 $y=4\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$。



说明 ① 若两个三角函数是周期函数，它们的最小正周期分别是 T_1、T_2，且 $\frac{T_1}{T_2}$ = 有理数，则这两个三角函数的代数和一定是周期函数，且 T_1、T_2 的最小公倍数 T 是它的一个周期，但 T 不一定是最小正周期.

一般地，我们还有

若定义在 $\mathbf{R}$ 上的两连续函数 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的最小正周期分别为 $T_1 = pa$、$T_2 = qa$、$p,q \in \mathbf{N}^*$，$(p,q) = 1$，a 为正实数，且 $p \neq q$，则 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 的最小正周期为 $\frac{pqa}{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$，且 $(n, qp) = 1$).

证明 若 T^* 是 $f(x)$ 的最小正周期，则 $f(x)$ 的任何正周期必是 T^* 的正整数倍(不然的话，若 $T = nT^* + r(0 < r < T^*, n \in \mathbf{N}^*)$ 是 $f(x)$ 的一个正周期，那么对定义域内任何 x，都有 $f(x) = f(x+T) = f(x + nT^* + r) = f(x + r)$，可见 r 是 $f(x)$ 的周期，这与 T^* 是 $f(x)$ 的最小正周期矛盾).

易知 pqa 是 $f(x)$ 的一个正周期，故 $pqa = mT^*$ ($m \in \mathbf{N}^*$)，于是 $T^* = \frac{kpqa}{n} = \frac{pqa}{m}$，

所以 $km = n$，$k \mid n$，又 $(k, n) = 1$，故 $k = 1$，所以 $T^* = \frac{pqa}{n}$，$(n, pq) = 1$.

② 两个周期函数之和的最小正周期可用最小公倍数法来求，除了上面的奇偶函数之和的情形，还有很多情形，下面再举两种情况：

(1) $A_1A_2 \neq 0$，$\frac{\omega_1}{\omega_2}$ = 有理数但不等于 1 时，$f(x) = A_1\sin(\omega_1 x + \varphi_1) + A_2\sin(\omega_2 x + \varphi_2)$ 的最小正周期是 $A_1\sin(\omega_1 x + \varphi_1)$、$A_2\sin(\omega_2 x + \varphi_2)$ 的最小正周期的最小公倍数.

证明 求导法中已证明，略.

(2) 设 $D = \{x \mid x \in \mathbf{R}$，但 $x \neq kT_2 + \varphi, k \in \mathbf{Z}\}$，$f_1(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，最小正周期为 T_1，$f_2(x)(x \in D)$ 是周期函数，最小正周期为 T_2，若 $\frac{T_1}{T_2}$ = 有理数，则 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)(x \in D)$ 的最小正周期是 T_1、T_2 的最小公倍数.

证 设 T_1、T_2 的最小公倍数为 T^*，则存在正整数 p、q，使 $T^* = pT_1 = qT_2$，于是

$$\begin{aligned} f(x+T^*) &= f_1(x+T^*) + f_2(x+T^*) = f_1(x+pT_1) + f_2(x+qT_2) \\ &= f_1(x) + f_2(x) = f(x). \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数，T^* 是它的一个周期.

若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则对任意的 $x \in D$，有 $x + T \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$，即

$$f_1(x+T) + f_2(x+T) = f_1(x) + f_2(x). \quad ①$$



若 $x_0 = kT_2 + \varphi, k\in\mathbf{Z}$，则必有 $x_0 - T = k'T_2 + \varphi, k'\in\mathbf{Z}$（不然的话，如 $x_0 - T \in D$，必有 $(x_0 - T) + T = x_0 \in D$，这与 $x_0 = kT_2 + \varphi, k\in\mathbf{Z}$ 即 $x_0 \notin D$ 矛盾）.

于是 $T = x_0 - (x_0 - T) = (k - k')T_2 = nT_2, n = k - k' \in \mathbf{Z}$.

又 $f_2(x+T) = f_2(x+nT_2) = f_2(x)$，结合①，得 $x\in D$ 时有

$$f_1(x+T) = f_1(x). \qquad ②$$

下面，我们证明对任意 $x_0 \in \mathbf{R} - D$，② 也成立.

取 $x_n \in D, n = 1, 2, 3, \cdots$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，由②及 $f_1(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，得 $f_1(x_n+T) = f_1(x_n)$，两边取极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x_n+T) = \lim\limits_{n\to\infty} f_1(x_n)$，即 $f_1(x_0+T) = f_1(x_0)$.
由 x_0 的任意性，知对一切 $x \in \mathbf{R} - D$，②式也成立. 这样，②对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故 T 是 $f_1(x)(x\in\mathbf{R})$ 的一个周期，所以 $T = mT_1, m\in\mathbf{Z}$ 但 $m\neq 0$.

综上，$T = mT_1 = nT_2$，所以 $T = kT^*, k\in\mathbf{Z}$ 但 $k\neq 0$. 所以 $f(x)(x\in D)$ 的最小正周期为 T_1、T_2 的最小公倍数 T^*.

例7 求函数 $f(x) = \sin 2x + 2\cos 2x + 3\tan 4x$ 的最小正周期.

解 定义域 $D = \{x \mid x\in\mathbf{R}，但 x \neq \frac{1}{4}k\pi + \frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}\}$.

函数 $f_1(x) = \sin 2x + 2\cos 2x = \sqrt{5}\sin(2x+\varphi)$，最小正周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$，$f_2(x) = 3\tan 4x$ 最小正周期 $T_2 = \frac{\pi}{4}$，故 $f(x)$ 的最小正周期是 π 与 $\frac{\pi}{4}$ 的最小公倍数 π.

说明 一般地，$f(x) = a\sin^n(\omega_1 x + \varphi_1) + b\tan^m(\omega_2 x + \varphi_2)(n, m\in\mathbf{N}^*, ab\neq 0, \omega_1\omega_2 \neq 0)$ 的最小正周期，是函数 $g(x) = \sin^n(\omega_1 x + \varphi_1)$ 与 $h(x) = \tan^m(\omega_2 x + \varphi_2)$ 的最小正周期 T_1（当 n 为奇数时，等于 $\frac{2\pi}{|\omega_1|}$；当 n 为偶数时，等于 $\frac{\pi}{|\omega_1|}$）、$T_2\left(=\frac{\pi}{|\omega_2|}\right)$ 的最小公倍数.

(Ⅵ) 极端法

例8 求函数 $f(x) = \sin x\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{3}x$ 的最小正周期.

解 显然 12π 是 $f(x)$ 的一个周期，要求 $f(x)$ 的最小正周期 $T(0 < T \leqslant 12\pi)$，由 $f(x+T) = f(x)$，得

$$\sin(x+T)\sin\frac{1}{2}(x+T)\sin\frac{1}{3}(x+T) = \sin x\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{3}x. \qquad ①$$

在区间 $(0, \pi)$ 内，$\sin x \neq 0, \sin\frac{1}{2}x \neq 0, \sin\frac{1}{3}x \neq 0$.

在①中令 $x = 0$，得 $\sin T\sin\frac{1}{2}T\sin\frac{1}{3}T = 0$.



等价于 $\sin T=0$，所以 $T=k_1\pi(0<k_1\leqslant 12)$. 在区间 $(0,\pi)$ 内，由于 $\sin(x+T)=(-1)^{k_1}\sin x\neq 0$，

由 ① 式得

$$\sin\frac{1}{2}(x+T)\sin\frac{1}{3}(x+T)=\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{3}x. \qquad ②$$

再令 $x\to 0$，得 $\sin\frac{1}{2}T\sin\frac{1}{3}T=0$，$\sin\frac{1}{2}T$ 和 $\sin\frac{1}{3}T$ 中至少一个为零. 不妨设 $\sin\frac{1}{2}T=0$，$T=4k_2\pi$，$k_2\in\mathbf{Z}$. 类似前面处理方法，又可得 $x\in(0,\pi)$ 时

$$\sin\frac{1}{3}(x+T)=\sin\frac{1}{3}x.$$

令 $x\to 0$，得

$$\sin\frac{1}{3}T=0,\ T=6k_3\pi,\ k_3\in\mathbf{Z}.$$

由于 $T=k_1\pi=4k_2\pi=6k_3\pi$，故 T 必须为 π、4π、6π 的最小公倍数 12π，或其倍数 24π，36π，…

经检验，12π 是所给函数的最小正周期.

能力训练

1.（2007 年四川高中数学竞赛预赛试题）下列函数中，既是在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内的增函数，又是以 π 为最小正周期的函数是（　　）

A. $y=|\sin x|$　　B. $y=e^{[illegible]}$

C. $y=\sin 2x$　　D. $y=\cos 4x$

2.（第 8 届“希望杯”高一竞赛题）若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，最小正周期都是 T，对于函数 $y=f_1(x)+f_2(x)$，以下判断中，正确的是（　　）

A. 最小正周期是 T　　B. 有最小正周期 t，且 $t<T$

C. 是周期函数，但可能没有最小正周期　　D. 可能是非周期函数

3. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期为（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

4. (第5届"希望杯"高二竞赛题)函数 $f_1(x)=\left|\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x}{2}\right|$，$f_2(x)=\sin\frac{2x}{3}+\cos\frac{2x}{3}$，$f_3(x)=\arccos(\sin x)$ 的最小正周期分别是 T_1、T_2、T_3，则 (　　)

A. $T_1<T_2<T_3$

B. $T_2<T_1<T_3$

C. $T_3<T_2<T_1$

D. $T_2<T_3<T_1$

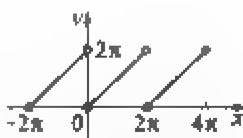


图 2-2-3

5. 如图 2-2-3 是定义在 R 上，且以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的图像，则函数 $y=\sin[f(x)]$ 的图像大致是 (　　)

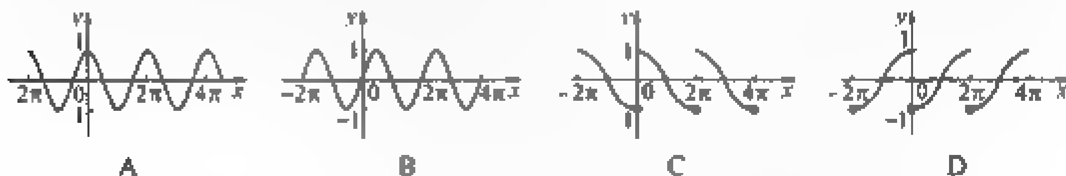


图 2-2-4

6. (第12届"希望杯"高一竞赛题)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$A,\varphi\in\mathbf{R}^+$，要使 $f(x)$ 的最小正周期 $T\in\left(\frac{1}{100},\frac{1}{50}\right)$，则正整数 ω 可取的值的集合中元素的数目是(　　)

A. 311　　B. 312　　C. 313　　D. 314

7. 函数 $f(x)=\cos^2 x$ 的最小正周期为________。

8. 函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期是________。

9. 函数 $y=\sin^{2n}x-\cos^{2m}x\ (n,m\in\mathbf{N}^*)$ 的最小正周期是________

10. 函数 $y=\sin x-2\cos 2x+4\sin 4x$ 的最小正周期为________。

11. 函数 $y=\sqrt[2n]{\sin x}\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 的最小正周期为________。

12. 函数 $y=|\sin x|+|\sin 2x|+|\sin 3x|$ 的最小正周期为________。

13. 求函数 $f(x)=3^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}+5|\sin 2x|$ 的最小正周期。

14. 求函数 $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 4x$ 的最小正周期。

15. 设函数 $f(x)=\sin^n\alpha x\cos^m\beta x\ (n,m\in\mathbf{N}^*,\alpha>\beta>0)$，试证：

(Ⅰ) $f(x)$ 为周期函数的充要条件是 $\frac{\beta}{\alpha}$ 为有理数。

(Ⅱ) 当 $\frac{\beta}{\alpha}$ 为有理数时，$f(x)$ 的最小正周期等于 T^* 或 $2T^*$（T^* 是 $\frac{\pi}{\alpha}$、$\frac{\pi}{\beta}$ 的最小公倍数）



第8讲　周期数列

1　周期数列的定义

知识扫描

1. 定义

对于数列$\{a_n\}$，若存在正整数T，使得对于任意的正整数$n\geq N$，都有

$$a_{n+T}=a_n$$

则称数列$\{a_n\}$为从第N项起的周期数列，T称为数列$\{a_n\}$的一个周期。若$N=1$，称$\{a_n\}$为纯周期数列（简称为周期数列）；若$N\geq 2$，则称$\{a_n\}$为混周期数列。由于数列的周期不唯一，我们把最小的一个叫做数列的最小正周期。

周期数列可看作是周期函数在正整数集上离散取值的特例，是离散的周期函数。因此周期数列保留了周期函数的一些特性，但它也有不少独特的性质。

如周期函数不一定有最小正周期，但周期数列必有最小正周期；周期函数的值域可以有界也可以无界，但周期数列的值域必是有限数集。

若T是数列$\{a_n\}$的周期，则$kT(k\in \mathbf{N}^*)$也是$\{a_n\}$的周期，所以周期数列一定是无穷数列，它的周期有无穷多个。

对于一个项数较多甚至无穷的数列，一旦发现具有某种周期性，就可以把问题归结为最初的几项，从有限推测无穷，从部分看到全貌，使问题简单化。

Ⅰ．周期函数的性质

性质1 若 T 是周期数列 $\{a_n\}$ 的最小正周期，S 是 $\{a_n\}$ 的一个周期，则 T 整除 S。

证明 假设 T 不能整除 S，即 $S=qT+k$（$q\in\mathbf{N}^*$，$k=1,2,\cdots,T-1$ 之一），因为 $a_{n+S}=a_n$，又因为 $a_{n+S}=a_{n+qT+k}=a_{n+k}$，所以 $a_{n+k}=a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），说明 k 也是 $\{a_n\}$ 的一个周期，这与所设 T 是 $\{a_n\}$ 的最小正周期矛盾，所以 T 整除 S。

性质2 若 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是周期数列，则数列 $\{a_n\pm b_n\}$、$\{a_nb_n\}$ 和 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$（$b_n\neq0$，$n\in\mathbf{N}^*$）也都是周期数列。

证明 记 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的周期分别为 T_1、T_2，则 T_1、T_2 的最小公倍数 $T=[T_1,T_2]$，$pT_1=qT_2$，$p,q\in\mathbf{N}^*$，

$$a_{n+T}\pm b_{n+T}=a_{n+pT_1}\pm b_{n+qT_2}=a_n\pm b_n,$$

同理

$$a_{n+T}b_{n+T}=a_nb_n,\ \frac{a_{n+T}}{b_{n+T}}=\frac{a_n}{b_n}.$$

所以 $\{a_n\pm b_n\}$、$\{a_nb_n\}$、$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 是周期数列，其最小正周期≤$[T_1,T_2]$（T_1、T_2 的最小公倍数）。

性质3 若 T 是数列 $\{x_n\}$ 的一个周期，则

① T 也是数列 $\{ax_n+b\}$ 的一个周期；

② 当 a、$b\in\mathbf{N}^*$ 时，数列 $\{x_{an+b}\}$ 的一个周期为 $\frac{T}{a}$。

证明 略。

性质4 如果 r 阶线性递归数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_{n+r}=b_1a_{n+r-1}+b_2a_{n+r-2}+\cdots+b_ra_n \qquad ①$$

（$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 为常数，$b_r\neq0$），初始项 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 已知，递归方程①的 r 个特征根 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 两两不等，且存在正整数 T，使 $x_k^T=1$（$k=1,2,\cdots,r$），则数列 $\{a_n\}$ 是周期数列。

简证 设 $a_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n+\cdots+c_rx_r^n$（$n\geq1$），其中 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 是由 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 确定的，则 $a_{n+T}=\sum\limits_{i=1}^{r}c_ix_i^{n+T}=\sum\limits_{i=1}^{r}c_ix_i^n=a_n$，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，所以 $\{a_n\}$ 是周期数列，T 是它的一个周期。

注 这里 $x_k^T=1$（$k=1,2,\cdots,r$）可改为 $x_k^{T_k}=1$（$k=1,2,\cdots,r$），只要取 $T=[T_1,T_2,\cdots,T_r]$（$T_1,T_2,\cdots,T_r$ 的最小公倍数）即可。

性质5 值域是有限数集的无穷递归数列，去掉前面若干项后，留下的数列是纯周期数列。

证明 设数列$\{a_n\}$的值域D是一个有限数集$\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$且满足关系式

$$a_{n+r}=f(a_{n+r-1},a_{n+r-2},\cdots,a_n)(n\in\mathbf{N}^*),$$

其中f是$D^r\to D$的映射，考察有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_r),(a_2,a_3,\cdots,a_{r+1}),\cdots,(a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+r-1}),\cdots \qquad ②$$

并且规定当且仅当$a_m=a_n,a_{m+1}=a_{n+1},\cdots,a_{m+r-1}=a_{n+r-1}$时，$(a_m,a_{m+1},\cdots,a_{m+r-1})=(a_n,a_{n+1},\cdots,a_{n+r-1})$，则有序数组②中不相同的最多只有$m^r$个，由抽屉原则可知②中第$r$组后$m^r+1$个中至少有两个相等，不妨设$N>r$，且

$$(a_N,a_{N+1},\cdots,a_{N+r-1})=(a_{N+T},a_{N+T+1},\cdots,a_{N+T+r-1}),$$

从而有
$$a_{N+T}=a_N,a_{N+T+1}=a_{N+1},\cdots,a_{N+T+r-1}=a_{N+r-1}.$$

下面用数学归纳法证明

当$n\geqslant N$时，$a_{n+T}=a_n$.

当$n=N$时，$a_{N+T}=a_N$前面已证.

假设$n\leqslant k(k\geqslant N)$时，均有$a_{n+T}=a_n$成立，由于

$$\begin{aligned}a_{k+1+T}&=f(a_{k+T},a_{k+T-1},\cdots,a_{k+T-r+1})\\&=f(a_k,a_{k-1},\cdots,a_{k-r+1})=a_{k+1},\end{aligned}$$

即当$n=k+1$时，$a_{k+1+T}=a_{k+1}$也成立，这就证明了对一切$n\geqslant N$的正整数n，$a_{n+T}=a_n$成立，也就是说，数列$\{a_n\}$从第N项起是周期数列.

性质6 设$\{a_n\}$是任意给定的周期数列，则必存在一个正整数k，使得$a_k\leqslant a_{k+1}$且$a_{k+1}\geqslant a_{k+2}$.

证明 不失一般性，我们可设$a_1\leqslant a_2$.

假设命题结论不成立，则$a_2<a_3$（若$a_2\geqslant a_3$，则命题已成立），同理可得

$$a_3<a_4,a_4<a_5,\cdots,a_n<a_{n+1},\cdots$$

所以

$$a_1\leqslant a_2<a_3<a_4<\cdots<a_m<a_{m+1}=a_1,$$

矛盾（这里m是$\{a_n\}$的最小正周期），所以命题成立.

用类似的方法可得如下更一般的结论.

性质7 设$\{a_n\}$是周期数列，最小正周期为m，$r\in\mathbf{N}^*$，$s\in\mathbf{N}^*$，且$(m,s)=r$，则

(1) 必存在$k\in\mathbf{N}^*$，使得$a_{k+s}\geqslant a_k$且$a_{k+2s}\leqslant a_{k+s}$；

(2) 同样必存在一个$t\in\mathbf{N}^*$，使得$a_{t+s}\leqslant a_t$且$a_{t+2s}\geqslant a_{t+s}$.

如果周期数列的周期为1，则该数列是常数列，即所有项均相等.



例题分析

例1 （第五届西部数学奥林匹克试题）已知 $\alpha^{2005}+\beta^{2005}$ 可表示成以 $\alpha+\beta$、$\alpha\beta$ 为变元的二元多项式，求这个多项式的系数之和.

解 在 $\alpha^k+\beta^k$ 的展开式中，令 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=1$，其所求系数之和为 S_k. 由 $(\alpha+\beta)(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})=(\alpha^k+\beta^k)+\alpha\beta(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})$，有

$$S_k=S_{k-1}-S_{k-2}.$$

从而，$S_k=(S_{k-2}-S_{k-3})-S_{k-2}=-S_{k-3}$.

同理，$S_{k-3}=-S_{k-6}$，所以，$S_k=S_{k-6}$.

于是，数列 $\{S_k\}$ 是以6为周期的周期数列. 又 $2005=6\times334+1$.

故 $$S_{2005}=S_1=1.$$

说明 判断出数列 $\{S_k\}$ 为周期数列，利用其周期性使问题简单化.

例2 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=b$（b 为任意正数），$a_{n+1}=-\frac{1}{a_n+1}$（$n\in \mathbf{N}^*$），能使 $a_n=b$ 的 n 的数值是 （　　）

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

解 $a_1=b$，$a_2=-\frac{1}{b+1}$，$a_3=-\frac{1}{-\frac{1}{b+1}+1}=-\frac{b+1}{b}$，$a_4=-\frac{1}{-\frac{b+1}{b}+1}=b$，

$a_5=-\frac{1}{b+1}$，$a_6=-\frac{b+1}{b}$，$a_7=b$，…

显然有，$a_1=a_4=a_7=\cdots=b$，$a_2=a_5=a_8=\cdots=-\frac{1}{b+1}$，$a_3=a_6=a_9=\cdots=-\frac{b+1}{b}$，所以，数列 $\{a_n\}$ 是以3为周期的数列，$a_{16}=b$，故选C.

下面证明数列 $\{a_n\}$ 以3为周期.

设 $a_n=f(n)$（$n\in \mathbf{N}^*$），由题意知

$$f(n+1)=-\frac{1}{f(n)+1},$$

$$f(n+2)=f[(n+1)+1]=-\frac{1}{f(n+1)+1}=-\frac{1}{1-\frac{1}{f(n)+1}}=-\frac{f(n)+1}{f(n)},$$

$$f(n+3)=f[(n+2)+1]=-\frac{1}{f(n+2)+1}=-\frac{1}{1-\frac{f(n)+1}{f(n)}}=f(n),$$



即 $f(n+3)=f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列$\{a_n\}$的最小正周期 $T=3$.

思考 能否写出数列$\{a_n\}$的通项公式?

下面探求数列$\{a_n\}$的通项公式，数列具有周期性且一个周期为3，猜想a_n含有三角函数，可用正弦或余弦表示，设$a_n=A\sin(\omega n+\varphi)+B$ 或 $a_n=A\sin\omega n+B\cos\omega n+C$，其中$\omega$满足$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3}$.

解 设$a_n=A\sin\frac{2\pi}{3}n+B\cos\frac{2\pi}{3}n+C$，由$a_1=b$，$a_2=-\frac{1}{b+1}$，$a_3=-\frac{b+1}{b}$，得

$$\begin{cases}A\sin\frac{2\pi}{3}+B\cos\frac{2\pi}{3}+C=b,\\ A\sin\frac{4\pi}{3}+B\cos\frac{4\pi}{3}+C=-\frac{1}{b+1},\\ A\sin2\pi+B\cos2\pi+C=-\frac{b+1}{b}.\end{cases}$$

解之得 $A=\frac{\sqrt{3}(b^2+2b)}{3(b+1)}$，$B=-\frac{b^3+3b^2+3b+2}{3b(b+1)}$，$C=\frac{b^3-3b-1}{3b(b+1)}$，

因此 $a_n=\frac{\sqrt{3}(b^2+2b)}{3(b+1)}\sin\frac{2\pi}{3}n-\frac{b^3+3b^2+3b+2}{3b(b+1)}\cos\frac{2\pi}{3}n+\frac{b^3-3b-1}{3b(b+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

说明 递推数列$a_{n+1}=\frac{ba_n+c}{da_n+e}$的周期性，利用矩阵这一运算工具，可得如下结果：

对于递推数列$a_{n+1}=\frac{ba_n+c}{da_n+e}(be-cd\neq0, bd\neq0)$，其系数对应$A=\begin{pmatrix}b&c\\d&e\end{pmatrix}$，则该数列为非常数的周期数列的充要条件是存在一个正整数$t\geqslant2$，使A^t为数量矩阵，即$A^t=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}(a\neq0)$，其中$t$就是数列$\{a_n\}$的一个周期.

先证a_{n+t}可表示为$a_{n+t}=\frac{b_ta_n+c_t}{d_ta_n+e_t}$，此处$\begin{pmatrix}b_t&c_t\\d_t&e_t\end{pmatrix}=A^t$，用数学归纳法

当$t=1$时，a_{n+1}对应矩阵$A=\begin{pmatrix}b&c\\d&e\end{pmatrix}$；

当$t=2$时，因为$a_{n+2}=\frac{ba_{n+1}+c}{da_{n+1}+e}=\frac{(b^2+dc)a_n+bc+ec}{(bd+de)a_n+dc+e^2}$，

所以a_{n+2}对应于矩阵$\begin{pmatrix}b^2+dc&bc+ec\\bd+de&dc+e^2\end{pmatrix}$.



而 $A^2=\begin{pmatrix}b&c\\d&e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&c\\d&e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^2+dc&bc+ec\\bd+ed&dc+e^2\end{pmatrix}$.

故 a_{n+2} 对应于矩阵 A^2.

假设 $l=k$ 时，$a_{n+k}=\frac{b_ka_n+c_k}{d_ka_n+e_k}$，$a_{n+k}$ 对应于矩阵 $A^k=\begin{pmatrix}b_k&c_k\\d_k&e_k\end{pmatrix}$，则当 $l=k+1$ 时，

$$a_{n+k+1}=\frac{ba_{n+k}+c}{da_{n+k}+e}=\frac{(b\cdot b_k+c\cdot d_k)a_n+bc_k+ce_k}{(db_k+ed_k)a_n+dc_k+ee_k},$$

而 $A^{k+1}=AA^k=\begin{pmatrix}b&c\\d&e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_k&c_k\\d_k&e_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bb_k+cd_k&bc_k+ce_k\\db_k+ed_k&dc_k+ee_k\end{pmatrix}$.

所以 a_{n+k+1} 对应于矩阵 A^{k+1}.

由此可知，该数列为非常数的周期数列⟺存在一个正整数 $l\geq2$，对于任意 $n\in\mathbf{N}^+$，都有 $a_{n+l}=a_n=\frac{a\cdot a_n+0}{0\cdot a_n+a}$⟺$A^l$ 为数量矩阵 $\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}(a\neq0)$.

例 3 已知实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=a$（a 为实数），$a_{n+1}=\frac{\sqrt3a_n+1}{\sqrt3-a_n}$（$n\in\mathbf{N}$），求 a_{2000} 的值.

解 $a_1=\frac{\sqrt3a_0+1}{\sqrt3-a_0}=\frac{\sqrt3a+1}{\sqrt3-a}$，$a_2=\frac{\sqrt3a_1+1}{\sqrt3-a_1}=\frac{a+\sqrt3}{1-\sqrt3a}$，

$a_3=\frac{\sqrt3a_2+1}{\sqrt3-a_2}=-\frac{1}{a}$，$a_4=\frac{\sqrt3a_3+1}{\sqrt3-a_3}=\frac{-\sqrt3+a}{\sqrt3a+1}$，

$a_5=\frac{\sqrt3a_4+1}{\sqrt3-a_4}=\frac{\sqrt3a-1}{a+\sqrt3}$，$a_6=\frac{\sqrt3a_5+1}{\sqrt3-a_5}=\frac{\sqrt3\left(\frac{\sqrt3a-1}{a+\sqrt3}\right)+1}{\sqrt3-\frac{\sqrt3a-1}{a+\sqrt3}}=a$.

因此 $a_6=a_0$，$a_7=a_1$，$a_8=a_2$，…

于是对于任意正整数 k 有

$$a_{6k+r}=a_r\ (r=0,1,2,3,4,5).$$

因为 $2000=6\times333+2$，

所以 $a_{2000}=a_2=\frac{a+\sqrt3}{1-\sqrt3a}$.

思考 在数列中求某些项的值，相当于求一些函数值，说起来很简单，但如果遇到通项公式没有给出或是通项较难求得时，做起来也就不那么容易了.

上述所给出的答案计算量明显较大，感觉机械操作过程颇多，没有充分利用函数的



思想和方法来解决问题．请看如下两种利用函数思想求解的方法：

方法1　将上面的a_1替换为a_n，a_4替换为a_{n-3}，得到

$$a_n=-\frac{1}{a_{n-3}},$$

同理得：$a_{n-3}=-\dfrac{1}{a_{n-6}}$．

所以得到：$a_n=a_{n-6}$．

用函数的思想认识$a_n=a_{n-6}$时，很显然数列$\{a_n\}$的最小正周期$T=6$．

因为$2000=6\times333+2$，

所以$a_{2000}=a_2=\dfrac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}$

方法2　把递推关系$a_n=\dfrac{\sqrt{3}a_{n-1}+1}{\sqrt{3}-a_{n-1}}$（$n\in\mathbf{N}^*$）变形，得$a_n=\dfrac{a_{n-1}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}a_{n-1}}$，

令$a_n=f(n)$，则$a_{n-1}=f(n-1)$，原递推关系为$f(n)=\dfrac{f(n-1)+\tan\frac{\pi}{6}}{1-f(n-1)\tan\frac{\pi}{6}}$，此式与

$\tan\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan x+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{6}}$十分相似，因此可把它认为是原递推关系的原型

$$a_n=f(n)=\tan\frac{n\pi}{6},$$

$$a_{n-1}=f(n-1)=\tan\frac{(n-1)\pi}{6},$$

所以我们很快可以判断出数列的一个周期是6，只要再证明$a_n=a_{n-6}$$\left(\text{由}a_n=-\dfrac{1}{a_{n-3}}\right.$与$a_{n-3}=-\dfrac{1}{a_{n-6}}$得$\left.a_n=a_{n-6}\right)$，因此得数列的一个周期是6．

$$a_{2000}=f(2000)=f(6\times333+2)=f(2)=a_2=\frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}$$

说明　利用函数的方法来解决数列问题，找到了这个数列最重要的性质即周期性，大大减少了运算量并简化了解题过程．



例4 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=2$，$x_{n+1}=\left[\frac{3}{2}x_n\right]$（这里 $\left[\frac{3}{2}x_n\right]$ 表示不超过 $\frac{3}{2}x_n$ 的最大整数），$n=1,2,\cdots$，记 $y_n=(-1)^{x_n}$，求证：$\{y_n\}$ 不是周期数列.

证明 由假设可知，当 x_n 是偶数时，则 $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n$，当 x_n 是奇数时，则 $x_{n+1}=\frac{3}{2}x_n-\frac{1}{2}$，于是对任意自然数 n，m，若 x_n 与 x_m 同奇偶，

则
$$x_{n+1}-x_{m+1}=\frac{3}{2}(x_n-x_m) \qquad ①$$

如果 $\{y_n\}$ 是周期数列，设其一个周期为 T，则对任何正整数 n，x_{n+T} 与 x_n 同奇偶，由①可得

$$x_{n+1+T}-x_{n+1}=\frac{3}{2}(x_{n+T}-x_n) \quad (n=1,2,\cdots).$$

以此类推，对任意正整数 n，有 $x_{n+1+T}-x_{n+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^n(x_{1+T}-x_1)$，显然存在 n_0，当 $n>n_0$ 时，$\left(\frac{3}{2}\right)^n(x_{1+T}-x_1)$ 不是整数，这和 $\{x_n\}$ 是正整数数列矛盾.

说明 数列的周期性是数列的重要性质，是竞赛考查的重点内容. 而周期性包含两个方面：数列有周期性与数列不是周期性的.

例5 设 $x_1=a$，$x_2=1$，且

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2-5}{x_n}\ (n\in \mathbf{N}^*).$$

试问，a 为何值时，$\{x_n\}$ 是以4为周期的周期数列？

解 显然 $a\neq0$，于是由题设得

$$x_3=\frac{1-5}{a}=-\frac{4}{a},$$

$$x_4=\frac{\left(-\frac{4}{a}\right)^2-5}{1}=\frac{16}{a^2}-5.$$

因为 $\{x_n\}$ 以4为周期，所以 $x_5=x_1=a$，即

$$a=\frac{x_4^2-5}{x_3}\Rightarrow\left(\frac{16}{a^2}-5\right)^2-5=-4.$$

解之得 $a=-2$ 或 2 或 $-\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 或 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

说明 本题的结论可推广到如下一般情形



设数列$\{x_n\}$满足$x_1=a$，$x_2=b$，且

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2+c}{x_n}\ (n\in\mathbf{N}^*),$$

则此数列$\{x_n\}$为周期数列的充要条件是：存在正整数k和m，满足$k<m$，使得

$$\sin\frac{2k\pi}{m}\neq 0,$$

且

$$\frac{a^2+b^2+c}{ab}=2\cos\frac{2k\pi}{m}.$$

这时该数列的一个周期为m.

证明　略.

例6　已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$（$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 3$）.（1）求a_3，a_4，a_5的值；（2）求S_{100}的值.

解　（1）由已知的递推关系得

$$a_3=a_2-a_1=2-1=1,$$
$$a_4=a_3-a_2=1-2=-1,$$
$$a_5=a_4-a_3=-1-1=-2.$$

（2）由递推关系$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$可能会联想起斐波那契数列，虽然形式十分相似，但有本质的区别. 斐波那契数列$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$（$n=0,1,2,\cdots$）是一个递增的数列，而这个数列是周期数列.

$$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}=(a_{n-2}-a_{n-3})-a_{n-2}=-a_{n-3},$$

同理得$a_{n-3}=-a_{n-6}$. 所以$a_n=a_{n-6}$.

因此数列的一个周期$T=6$.

$$a_6=a_5-a_4=-2-(-1)=-1.$$

方法1　$S_{100}=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})+\cdots$
$+(a_{91}+a_{92}+a_{93}+a_{94}+a_{95}+a_{96})+a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100}$
$=16(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100}$
$=16(1+2+1-1-2-1)+1+2+1-1=3$

方法2　$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，$a_{n-1}=a_{n-2}-a_{n-3}$，$\cdots$，$a_3=a_2-a_1$，这$n-1$个式子相加得：

$$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_3=a_{n-1}-a_1,$$
$$S_n=a_{n-1}+a_2,\ (n\in\mathbf{N}^*\text{且}n\geqslant 2),$$
$$S_{100}=a_{99}+a_2=a_{16\times6+3}+a_2=a_3+a_2=1+2=3.$$



注 由数列$\{a_n\}$的一个周期$T=6$，还可以求出数列$\{a_n\}$通项$a_n=a_{6k+r}=a_r$($r=1,2,3,4,5,6$)和数列前n项之和$S_n=a_{n-1}+a_2$($n\in \mathbf{N}^*$且$n\geqslant 2$).

说明 数列求和难于把握的地方主要是找不出数列的规律，尤其是遇到那些陌生的数列，或是不可以用常用求和方法(如："公式法"、"转化法"、"错位相减"、"裂项法"、"差分法"以及"待定系数法"等)解决的数列. 找到规律，就会找到解决问题的突破口.

例7 (1992年全国高中联赛题)设数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$满足$a_1=a_2=1,a_3=2$，且对任何正整数$n$都有$a_na_{n+1}a_{n+2}\neq 1$，又$a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，则$a_1+a_2+\cdots+a_{100}$的值是____.

解 由$a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，得$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}$，两式相减得$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}(a_{n+4}-a_n)=a_{n+4}-a_n$，所以$(a_{n+4}-a_n)(a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}-1)=0$，因为$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\neq 1$，所以$a_n=a_{n+4}$，故$\{a_n\}$是以4为周期的周期数列. 而$a_1=a_2=1,a_3=2,a_1a_2a_3a_4=a_1+a_2+a_3+a_4$，所以$a_4=4$，$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=25(a_1+a_2+a_3+a_4)=25\times 8=200$.

说明 此题通过将所给数列的递推关系中的标号变动，构造与之相应的等式，利用两者的协调作用(相加或相减)消去一些项，得出数列中某两项的关系，使周期性显露出来，促使问题解决. 本题结论可推广为如下更一般情形.

定理 数列$\{a_n\}$满足$\prod\limits_{i=0}^{m}a_{n+i}=P\sum\limits_{i=0}^{m}a_{n+i}$，($P\neq 0$，$\prod\limits_{i=1}^{m}a_{n+i}\neq P$，$m\in \mathbf{N}^*$)，则$m+1$是它的一个周期.

证明 由
$$\prod_{i=0}^{m}a_{n+i}=P\sum_{i=0}^{m}a_{n+i} \quad ①$$
得
$$\prod_{i=1}^{m+1}a_{n+i}=P\sum_{i=1}^{m+1}a_{n+i} \quad ②$$
②－①得
$$(a_{n+m+1}-a_n)\prod_{i=1}^{m}a_{n+i}=Pa_{n+m+1}-Pa_n$$
所以
$$(a_{n+m+1}-a_n)\left(\prod_{i=1}^{m}a_{n+i}-P\right)=0.$$
因为 $\prod\limits_{i=1}^{m}a_{n+i}-P\neq 0$，所以$a_{n+m+1}=a_n$.

即$m+1$为该数列的一个周期.

注 $m+1$是数列的一个周期，但不一定是最小正周期. 譬如定理中数列的前$m+1$项本身就具有周期性的话，数列的最小正周期就不为$m+1$.

在中学阶段，周期数列问题的一般解法是列举前有限项观察其周期性，再利用其周



期求解．显然，列举前有限项的方法只能解决一些最小正周期不大的数列问题，对于最小正周期较大的数列我们就不易解决了，而且，由数列的前有限项来得出它是周期数列的结论也缺乏科学证明，上面的定理提供了一个科学依据．

例 8 设 $a\in\mathbf{N}^*$，$a\neq10^n(n=0,1,2,\cdots)$，现构造数列 a_n，a_{k+1} 是 a_k 的各位数字的平方和．如果存在 $T\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{T+k}=a_k$，则称 a_k 是周期为 T 的"周期数"．证明：

(1) 周期数有且只有 4，16，37，58，89，145，42，20 这八个数；

(2) 对任意正整数 a_1，都存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使 $a_n=1$ 或 $a_n=4$．

证明 很明显，如果 $a_n=1$，则对任意 $m>n$，有 $a_m=1$；如果 $a_n=4$，容易计算，此后的数列将会形成下列数字的循环：16，37，58，89，145，42，20，4．由此可以说明，周期数确实只有八个．

设 $M=10^nb_n+10^{n-1}b_{n-1}+\cdots+10b_1+b_0(b_n\neq0)$为任一正整数，它的各位数字的平方和为 $N=b_n^2+b_{n-1}^2+\cdots+b_1^2+b_0^2$，则

$$M-N=(10^n-b_n)b_n+\cdots+(10-b_1)b_1-(b_0-1)b_0.$$

显然，$(b_0-1)b_0\leqslant72$．如果 $n\geqslant2$，则 $(10^n-b_n)b_n\geqslant99$，而当 $i=1,2,\cdots,n-1$ 时，$(10^i-b_i)b_i\geqslant0$，所以 $M>N$．由此可知，对任意自然数 a_1，如果数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中各项不小于 100，那它将是一个递减数列，因此，继续下去必定会出现小于 100 的项．所以我们只需对小于 100 的正整数来证明结论的正确性．

设 $a_k=10i+j$ 是数列中小于 100 的项．因为将 a_k 改为 $10j+i$ 时，其后的数列并不改变，所以我们可以附加条件 $i\geqslant j\geqslant0$，$i\geqslant1$．此时 $a_{k+1}=i^2+j^2$，其值列表如下．

表 1 $a_{k+1}=i^2+j^2$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2								
2	4	5	8							
3	9	10	13	18						
4	16	17	20	25	32					
5	25	26	29	34	41	[illegible]				
6	36	37	40	45	52	61	72			
7	49	50	53	58	65	74	85	98		
8	64	65	68	73	80	89	100	113	128	
9	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

从表中我们可以划去数 1，10，100 以及 4，16，20，37，58，89，145，因为对它们来说命



题总是正确的 此外，我们还可以划去数 2，50，40，52，61，85，98，73，80，81，90，106，130，这些数与上述的数或与下列数的区别仅仅在于数字排列的顺序的不同(当然，所有数中的 0 均可弃之不顾!) 这样我们只需对剩下的 27 个数来验证命题的正确性，它们是 5，8，9，13，18，17，25，32，26，29，34，41，36，45，72，49，53，65，74，64，68，113，128，82，97，1，7 和 162 经检验，知这 27 个数中每一个最终或者得到 1，或者得到 4，16，37，58，89，145，42，20 中的一个，而这些数又周期性地循环，因此命题得到证明.

说明 数学竞赛试卷中常有这样一类问题，将自然数的各位数字赋以某种变换，使自然数巧妙地与函数(或递推数列)联系起来，这样题目更具灵活性，要处理此类问题需要借助于自然数的一些性质，如自然数的某种周期性等.

能力训练

1. (2005 年湖南省高考题)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}(n\in \mathbf{N}^*)$，则 a 等于 ( )

A. 0　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. (2007 年数学奥林匹克协作体夏令营试卷(一)试题)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2000$，$a_2=2007$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in \mathbf{N}^*)$，则 a_{2008} 等于 ( )

A. 2007　　B. -2007　　C. 7　　D. -7

3. 数列$\{a_n\}$的通项式为 $a_n=\sin\frac{n}{3}\pi$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}+a_{2008}$ 的值为 ( )

A. 0　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

4. (第 19 届“希望杯”高一竞赛题)数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{1}{a_n+1}$，则 a_{2008} 等于 ( )

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 3　　D. 3

5. (第 18 届“希望杯”高一竞赛试题)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}a_n+\sqrt{6}}{a_n-\sqrt{2}}(n\in \mathbf{N}^*)$，则 $a_{2007}=$ ( )

A. 0　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$



6. 若数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & 0\leqslant a_n<\frac{1}{2};\\ 2a_n-1, & \frac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$$

若$a_1=\frac{6}{7}$，则$a_{20}=$ （　　）

A. $\frac{6}{7}$　　B. $\frac{5}{7}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. 0

7. 已知$x_1=1$，$x_2=2$，且$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2-7}{x_n}$（$n\in\mathbf{N}^*$），则数列$\{x_n\}$的最小正周期为______.

8.（第5届"希望杯"竞赛试题）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=13$，$a_2=56$，对所有的正整数n都有$a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，则$a_{1994}=$______.

9. 函数$f(x)$由下表定义：

x	2	5	3	1	4
$f(x)$	1	2	3	4	5

若$a_0=5$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n=0,1,2,\cdots$，则$a_{2007}=$______.

10. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\sqrt{3}$，$a_n=\frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$（$n\geqslant 2$），则$a_1+a_5+a_9+\cdots+a_{2009}=$______

11.（第15届"希望杯"高二竞赛题）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n-1}{a_n+\sqrt{3}}$（$n\in\mathbf{N}^*$），则$a_{2004}=$______.

12.（1999年河南省竞赛题）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，且$a_{n+1}a_{n+2}\neq 1$，则$S_{1999}=\sum\limits_{n=1}^{1999}a_n=$______.

13. 设f是从$A=\{1,2,3,\cdots,2007\}$到A的函数，并且$a_1=f(1)$，$a_{n+1}=f(a_n)$，则必存在k，使$a_{2k}=a_k$（$k\in\mathbf{N}^*$）.

14. 实数列$\{a_n\}$满足条件$a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$. 证明：存在某个正整数N，当$n\geqslant N$时，有$a_{n+9}=a_n$.

15.（1996年日本奥林匹克试题）设$x>1$，且不是整数. 求证：通项为$a_n=[x^{n+1}]-x[x^n]$（$n=1,2,3,\cdots$）的数列$\{a_n\}$不是周期数列，即不存在正整数p，使得对任意正整数n，都有$a_{p+n}=a_n$.（其中$[x]$表示不超过x的最大整数）.



2　某些特殊数列的周期性

知识扫描

1．周期函数列

函数迭代的定义　设 D 是一非空集合，$f: D\to D$ 是集合 D 到自身的一个映射，称 $f_0(x)=x$ 为函数 $f(x)$ 的零次迭代，$f_1(x)=f(x)$ 为 $f(x)$ 的 1 次迭代，当 $n>1$ 时，函数的 n 次迭代由

$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)], n\in \mathbf{N}^*$$

归纳定义。

注　$f_n(x)$ 有时也写作 $f^{(n)}(x)$。

周期函数列定义　若存在正整数 $T\in \mathbf{N}^*$，使

$$f_{n+T}(x)=f_n(x), x\in D.$$

对一切正整数 n 成立，则称 $f_n(x)$ 为周期函数列，T 是 $f(x)$ 的一个迭代周期。

函数迭代问题是各级各类数学竞赛试题的来源之一，这类试题往往有一定难度和深度，方法多样，灵活多变，巧妙无比。

函数的迭代周期概念是现代数学中极为重要的一个概念，是产生"混沌"的基础。

即使是非周期的迭代，也可产生美丽的图案，如图 3－2－1 所示

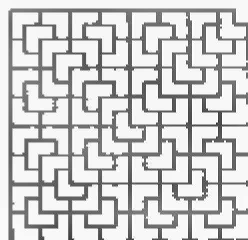


图 3－2－1



它是由如图3-2-2所示的A型胞原图生成的.

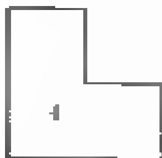


图3-2-2

这已成为现代数学研究的一个新课题.

Ⅱ. 周期点定义

设$f(x)$是定义在集D上的函数,若存在$Z_0\in D$,使得

$$f_k(Z_0)=Z_0$$
$$f_j(Z_0)\neq Z_0,\ j=1,2,\cdots,k-1$$

则称Z_0是函数$f(x)$的一个k-周期点,并把点列$Z_0,Z_1=f(Z_0),Z_2=f_2(Z_0),\cdots,Z_{k-1}=f_{k-1}(Z_0)$叫做函数$f$的一个$k$-周期轨道.其中$k\in \mathbf{N}^*$是一个确定的正整数.

从定义可知,f的k-周期轨道中任何两点均不相同,每一点都是f的k-周期点.

Ⅲ. 模周期数列

设整数列$\{a_n\}$,$0\leqslant a_n(\bmod m)\leqslant m-1$,我们称$\{a_n(\bmod m)\}$为$\{a_n\}$的模数列,若$\{a_n(\bmod m)\}$是周期数列,则称$\{a_n\}$是模周期数列.

模周期数列是周期数列的一种拓广.



例题分析

例1 已知函数$f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$,对于正整数n,定义$f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$.求$f_{35}(x)$的解析式.

分析 如果从题设条件入手逐步推求$f_{35}(x)$的解析式,工作量很大,显然是行不通的.为此,可将原题一般化,直接推求$f_n(x)$的解析式.

解 依题设,有

$$f_1(x)=\frac{2x-1}{x+1},$$

$$f_2(x)=f_1[f_1(x)]=f_1\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=\frac{x-1}{x},$$



$$f_3(x)=f_1[f_2(x)]=f_1\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x-2}{2x-1},$$

$$f_4(x)=f_1[f_3(x)]=f_1\left(\frac{x-2}{2x-1}\right)=\frac{1}{1-x},$$

$$f_5(x)=f_1[f_4(x)]=f_1\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x+1}{2-x},$$

$$f_6(x)=f_1[f_5(x)]=f_1\left(\frac{x+1}{2-x}\right)=x,$$

$$f_7(x)=f_1[f_6(x)]=f_1(x).$$

这就表明，$f_n(x)$ 是一个周期函数列，它的最小正周期为6．于是，$f_n(x)$的解析式为

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{2x-1}{x+1}(n=6k+1),\\ \frac{x-1}{x}(n=6k+2),\\ \frac{x-2}{2x-1}(n=6k+3),\\ \frac{1}{1-x}(n=6k+4),\\ \frac{x+1}{2-x}(n=6k+5),\\ x(n=6k+6),\end{cases}$$

其中，k为非负整数．

在$f_n(x)$的表达式中，令$n=1234$，即得

$$f_{1234}(x)=f_{6\times 205+4}(x)=\frac{1}{1-x}.$$

说明 上面解题中体现了两个基本过程：一个是一般化的过程，为了得到$f_{1234}(x)$的解析式，先从特殊到一般，直接推求$f_n(x)$的表达式；一个是特殊化的过程，在寻求$f_n(x)$的表达式时，又从一般退回到特殊，根据初始条件和递推关系，先考察$n=1,2,\cdots,7$时的情形，从中找出规律性的东西．然后再把这两个过程有机地结合起来，原题便得以解出．由此可见，在实际解题时，一般化和特殊化常常可以结合起来运用，以便相互补充，相互支持，提高解题效率．

在高考与竞赛数学中，经常出现与函数、函数列有关的周期性问题．正确认识与把握这类周期函数（列）的周期性特点，对解决问题有着举足轻重的作用．

例2 已知 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2(1-x), & \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$ 定义 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{n个}(x)\cdots))$，$n\in\mathbf{N}^*$．



求 $f_{2006}\left(\frac{2}{15}\right)$ 的值.

分析 从题设给出的形式初看，其周期性一片茫然，但仔细一想，若非周期函数，何以求解！然而求了 $f_1\left(\frac{2}{15}\right)$、$f_2\left(\frac{2}{15}\right)$、$f_3\left(\frac{2}{15}\right)$ 后又会再次失去信心．其实只要咬定青山，必定柳暗花明．

解 由已知函数解析式可得：

$$f_1\left(\frac{2}{15}\right)=\frac{2}{15}+\frac{1}{2}=\frac{19}{30},$$

$$f_2\left(\frac{2}{15}\right)=f\left(\frac{19}{30}\right)=2\left(1-\frac{19}{30}\right)=\frac{11}{15},$$

$$f_3\left(\frac{2}{15}\right)=f\left(\frac{11}{15}\right)=2\left(1-\frac{11}{15}\right)=\frac{8}{15},$$

$$f_4\left(\frac{2}{15}\right)=f\left(\frac{8}{15}\right)=2\left(1-\frac{8}{15}\right)=\frac{14}{15},$$

$$f_5\left(\frac{2}{15}\right)=f\left(\frac{14}{15}\right)=2\left(1-\frac{14}{15}\right)=\frac{2}{15},$$

所以 $f_n\left(\frac{2}{15}\right)$ 是以 5 为周期变化的，即有

$$f_{5k+1}\left(\frac{2}{15}\right)=f_1\left(\frac{2}{15}\right)，由于 2006=5\times401+1,$$

所以

$$f_{2006}\left(\frac{2}{15}\right)=f_1\left(\frac{2}{15}\right)=\frac{19}{30}.$$

说明 一般情况下，若函数、函数列是以 n 重形式给出的，应该首先考虑其周期性．

用函数的观念看数列并不少见，但用分段函数的方式表示数列的递推关系却比较少见，而其实质是"数列发生器"的一个程序．

本题解题过程说明，$f(x)$ 有 5–周期轨 $\left\{\frac{2}{15},\frac{19}{30},\frac{11}{15},\frac{8}{15},\frac{14}{15}\right\}$.

例 3 设 $a_1=1,a_2=2$，且

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n，当 a_n\cdot a_{n+1} 为偶数时，\\ a_{n+1}-a_n，当 a_n\cdot a_{n+1} 为奇数时.\end{cases}$$

求证 $a_n\neq0(n=1,2,3,\cdots)$

证明 数列的开头几项为 1，2，7，29，22，23，49，26，−17，…，模 4 后得

$$1,2,3,1,2,3,1,2,3,\cdots$$



设 $a_{n+3}\equiv a_n \pmod 4$，对 $n=1,2,\cdots,k+3$ 成立，则

$$a_{k+3}\equiv a_k \pmod 4,$$

所以 $a_{k+2}a_{k+3}$ 与 $a_{k-1}a_k$ 奇偶性相同，所以

$$a_{k+4}=5a_{k+3}-3a_{k+2}\equiv 5a_k-3a_{k-1}\equiv a_{k+1} \pmod 4$$

或

$$a_{k+4}\equiv a_{k+3}+a_{k+2}\equiv a_k+a_{k-1}\equiv a_{k+1} \pmod 4.$$

因此数列 $\{a_n\}$ 模 4 后，余数成周期数列，周期为 3. 因此 $a_n\not\equiv 0 \pmod 4$，更有 $a_n\neq 0$.

说明 为了证明一切正整数 n，$a_n\neq 0$，我们证明 $a_n\not\equiv 0 \pmod 4$ 即达到目的. 恰当地选择模十分重要，模周期数列中的"模"是关键，找到了模，问题就会简化. 怎样找模呢？通过最初的几项，猜测它们的规律，然后再证明或根据题设合理选模.

例 4 在边长为 8 单位长的正方形盘 $ABCD$ 中，有一边长为 5 的正三角形彩色板 OEF（顶点 O 染成红色，E、F 为白色）如图 3-2-3 放置（E 与 D 重合，EF 重合在 AD 边上）. 现令三角形彩板以 F 为支点向左转动，至 O 点碰到 AB 为止，完成一次"左进"，再以 O 在 AB 上接触点为支点，将三角形彩板向左转动，作第二次"左进"，继续下去，直至第 1990 次"左进"后停止. 问：此时三角形彩板上红色顶点 O 距 A 点多远？并说明理由.

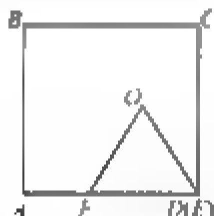


图 3-2-3

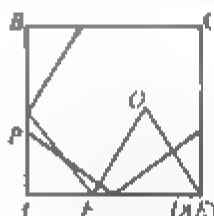


图 3-2-4

解 三角形彩板"左进"规律是：

① 每左进 3 次，红色顶点 O 在盘内；

② 每左进 16 次，三角板回到原来出发前位置，但红色顶点 O 变到了 AD 边上 F 点的位置，F 变到点 E 的位置.

从而推知，每左进 48 次，三角板及其红色顶点完全回到原来位置.

又 $1990=48\times 41+22$.

故左进 1990 次相当于左进 22 次的状况. 左进 16 次，O 变到 F 位置. 再左进 6 次，该点变到 AB 边上，不妨设为点 P，此时 F 恰好到 AD 的中点，故 $PA=3$.

说明 这里我们通过 16 次左进的状况，推出周期为 48. 如果没有周期性帮忙，我们就会陷入那种机械的重复试验中.

有好多几何问题，通过挖掘、探索，可以找出它的特殊规律，其中周期现象就是这种



特殊现象的一种.

例 5 取定自然数 $p\geqslant 2$，记 $\theta=\frac{2\pi}{p}$. 如果对每个实数 $x\in \mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 均满足关系式

$$f(x+a)=\frac{(\cos\theta)f(x)-\sin\theta}{(\sin\theta)f(x)+\cos\theta},(a>0)$$

则 $f(x)$ 是周期函数，pa 是它的一个周期.

解 取 $\varphi(x)=\frac{(\cos\theta)x-\sin\theta}{(\sin\theta)x+\cos\theta}$，则有

$$\begin{aligned}\varphi^2(x)=\varphi[\varphi(x)]&=\frac{(\cos\theta)\varphi(x)-\sin\theta}{(\sin\theta)\varphi(x)+\cos\theta}\\&=\frac{\cos\theta(x\cos\theta-\sin\theta)-\sin\theta(x\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta(x\cos\theta-\sin\theta)+\cos\theta(x\sin\theta+\cos\theta)}\\&=\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)x-2\cos\theta\sin\theta}{x\cdot 2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta}\\&=\frac{(\cos2\theta)x-\sin2\theta}{(\sin2\theta)x+\cos2\theta}.\end{aligned}$$

一般地，用数学归纳法可证

$$\varphi^n(x)=\frac{(\cos n\theta)x-\sin n\theta}{(\sin n\theta)x+\cos n\theta}$$

因此，$\varphi^p(x)=x$，即 $\varphi(x)$ 有迭代周期 P. 据此可断定 $f(x)$ 是周期函数，pa 是它的一个周期.

说明 用 $R(x)$ 表示线性函数或 $R(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$，如果函数 $f(x)$ 对一切实数 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+a)=R[f(x)]$ $(a>0)$，则必有 $f(x+na)=R^n[f(x)]$ $(n\in\mathbf{N})$，这样 $f(x)$ 是否为周期函数的问题完全归结为 $R(x)$ 的迭代周期是否存在的问题，这也正是本例所给出的问题的本质所在.

例 6 （第 27 届国际数学奥林匹克试题）平面上给定 $\triangle A_1A_2A_3$ 及点 P_0，定义 $A_s=A_{s-3}$，$S\geqslant 4$. 构造点列 P_1，P_2，P_3，…，使得 P_{k+1} 为绕中心 A_{k+1} 顺时针旋转 $120°$ 时，P_k 所达到的位置，$k=0,1,2,\cdots$，若 $P_{1986}=P_0$，证明 $\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

证明 我们约定点 A 所对应的复数仍记为 A.

记 $u=\cos60°+i\sin60°$.

依题意，点 P_n 由点 P_{n-1} 绕 A_n 顺时针旋转 $120°$ 时得到，即向量 $\overrightarrow{A_nP_n}$ 是由向量 $\overrightarrow{P_{n-1}A_n}$ 沿自己的方向在直线 $P_{n-1}A_n$ 上平移了 $P_{n-1}A_n$ 长度单位，再逆时针旋转 $60°$ 得到的，根据复数减法及乘法的几何意义，有

$$\begin{aligned}P_n &= (1+u)A_n - uP_{n-1}\\ &= (1+u)A_n - u[(1+u)A_{n-1} - uP_{n-2}]\\ &= (1+u)(A_n - uA_{n-1}) + u^2P_{n-2}\\ &= (1+u)(A_n - uA_{n-1}) + u^2[(1+u)A_{n-2} - uP_{n-3}]\\ &= (1+u)(A_n - uA_{n-1} + u^2A_{n-2}) - u^3P_{n-3}\\ &= (1+u)(A_n - uA_{n-1} + u^2A_{n-2}) - u^3[(1+u)A_{n-3} - uP_{n-4}]\\ &= (1+u)(A_n - uA_{n-1} + u^2A_{n-2} - u^3A_{n-3}) + u^4P_{n-4}\\ &= \cdots\cdots\\ &= (1+u)[A_n - uA_{n-1} + u^2A_{n-2} - u^3A_{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}u^{n-1}A_1] + (-1)^n u^n P_0\end{aligned}$$

当 $n=1986$ 时，

$$P_{1986} = (1+u)(A_{1986} - uA_{1985} + u^2A_{1984} - u^3A_{1983} + \cdots - u^{1985}A_1) + u^{1986}P_0 \qquad ①$$

因为 $P_{1986}=P_0$，

$$1+u = 1+\cos60^\circ + i\sin60^\circ \neq 0,$$
$$u^{1986} = (\cos60^\circ + i\sin60^\circ)^{1986} = 1.$$

所以由①式得

$$A_{1986} - uA_{1985} + u^2A_{1984} - u^3A_{1983} + \cdots - u^{1985}A_1 = 0.$$

又因为 $A_s = A_{s-3}(s\geqslant 4)$ 及 $u^3=-1$，则上式可化为

$$(A_3 - uA_2 + u^2A_1) + (A_3 - uA_2 + u^2A_1) + \cdots + (A_3 - uA_2 + u^2A_1) = 0.$$

即
$$A_3 - uA_2 + u^2A_1 = 0. \qquad ②$$

因为 $u^2 - u + 1 = 0$，

所以
$$u^2 = u - 1,$$

代入②式

$$A_3 - uA_2 + uA_1 - A_1 = 0,$$
$$u(A_2 - A_1) = A_3 - A_1.$$

这个式子表明向量 $\overrightarrow{A_1A_3}$ 由向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 逆时针旋转 60° 得到，即 $\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

例 7 （第四届全国冬令营试题）设 S 是复平面上的单位圆周（即模等于 1 的复数的集合），f 是从 S 到 S 的映射，对于任何 $z\in S$，定义 $f^{(1)}(z)=f(z)$，$f^{(2)}(z)=f(f(z))$，…，$f^{(k)}(z)=f(f^{(k-1)}(z))$，…. 如果 $c\in S$ 及正整数 n 使得 $f^{(1)}(c)\neq c$，$f^{(2)}(c)\neq c$，…，$f^{(n-1)}(c)\neq c$，$f^{(n)}(c)=c$，我们就说 c 是 f 的 n-周期点. 设 m 是大于 1 的正整数且 f 的定义如下：



$$f(z)=z^m,\ z\in S$$

试求 f 的 1989 -周期点的个数

解 分段进行讨论和计算

(1) 若 $z_0\in S$ 是 $f^{(n)}$ 的不动点(即 $f^{(n)}(z_0)=z_0$)且 z_0 为 f 的 m-周期点，则必有 $m\mid n$。

设 $n=pm+q$，$0\leqslant q<m$，于是有

$$z_0=f^{(n)}(z_0)=f^{(q)}(f^{(m)}(\cdots(f^{(m)}(z_0))))=f^{(q)}(z_0),$$

若 $q\neq0$，则上式意味着 z_0 为 f 的 q-周期点，这与已知的 z_0 为 f 的 m-周期点矛盾，故必有 $q=0$，即 $m\mid n$。

(2) 设 $B_n=\{z\in S\mid f^{(n)}(z)=z\}$，于是 $B_{(n,k)}=B_n\cap B_k$，此处 (n,k) 表示 n 与 k 的最大公约数。

由定义直接可知，当 $m\mid n$ 时，$B_m\subset B_n$，从而 $B_{(n,k)}\subseteq B_n\cap B_k$。反之，若 $z_0\in B_n\cap B_k$，记 $n=pk+q$，$0\leqslant q<k$，于是 $z_0=f^{(q)}(z_0)$，这意味着 $z_0\in B_q\cap B_k$，递推下去便知 $z_0\in B_{(n,k)}$，再由 $z_0\in B_n\cap B_k$ 的任意性，即知 $B_n\cap B_k\subseteq B_{(n,k)}$。

(3) 因为 $1989=3^2\times13\times17$，1989 的真约数是 117、153、663 中(至少)一个约数，所以 f 的所有 1989 -周期点的集合为 $T=B_{1989}\setminus(B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663})$。

容易看出 $T\subseteq B_{1989}\setminus(B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663})$，故只需再证相反的包含关系。

对于任意的 $z_0\in B_{1989}\setminus(B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663})$，因 z_0 是 $f^{(1989)}$ 的不动点，故有 $k\leqslant1989$，使 z_0 为 f 的 k-周期点。若 $k<1989$，由(1)，$k\mid1989$，从而 k 至少是 117、153、663 这三个数中一个数的因数，故 $z_0\in B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663}$，矛盾，故 $k=1989$，即 $z_0\in T$。

(4) 因为 $f^{(n)}(z)=z^{m^n}$，故知 $z\in B_n$ 当且仅当 z 为 m^n-1 单位根，所以 B_n 中元素个数为 $|B_n|=m^n-1$，于是由容斥原理和前面(2)、(3)，便知

$$\begin{aligned}|B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663}|&=|B_{117}|+|B_{153}|+|B_{663}|-|B_{117}\cap B_{153}|-|B_{153}\cap B_{663}|\\&\quad-|B_{663}\cap B_{117}|+|B_{117}\cap B_{153}\cap B_{663}|\\&=|B_{117}|+|B_{153}|+|B_{663}|-|B_{9}|-|B_{39}|-|B_{51}|+|B_{3}|\\&=(m^{117}-1)+(m^{153}-1)+(m^{663}-1)-(m^{9}-1)-(m^{39}-1)-\\&\quad(m^{51}-1)+(m^{3}-1).\end{aligned}$$

从而 f 的 1989-周期点的总数为 $m^{1989}-m^{663}-m^{153}-m^{117}+m^{51}+m^{9}+m^{39}-m^{3}$

例 8 (2000 年国家集训队选拔赛试题)(1) 设 a、b 是正实数，数列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 满足 $x_0=1$，$y_0=0$，且

$$\begin{cases}x_{k+1}=ax_k-by_k,\\y_{k+1}=x_k+ay_k,\end{cases}k=0,1,2,\cdots$$



求证：$x_k = \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^l a^{k-2l}(a^2+b^2)^l \lambda_{k,l}$，其中 $\lambda_{k,l} = \sum_{i=l}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2i} C_i^l$.

(2) 记 $u_k = \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} \lambda_{k,l}$，对任意给定的正整数 m，将 u_k 除以 2^m 所得的余数记为 $z_{m,k}$，求证 $\{z_{m,k}\}$，$k=0,1,2,\cdots$ 为纯周期数列，并求出最小正周期.

证法 1 由 $x_{k+1}+i\sqrt{b}y_{k+1}=(x_k+i\sqrt{b}y_k)(a+i\sqrt{b})$，$x_0=1$，$y_0=0$，得 $x_k+i\sqrt{b}y_k=(a+i\sqrt{b})^k$，同理可得 $x_k-i\sqrt{b}y_k=(a-i\sqrt{b})^k$. 从而 $x_k=\frac{1}{2}[(a+i\sqrt{b})^k+(a-i\sqrt{b})^k]$.

取 $\theta\in[0,\pi]$，使得 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b}}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b}}$，则 $x_k=(\sqrt{a^2+b})^k\cos k\theta$.

由于 $\cos k\theta+i\sin k\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^k$，所以

$$\begin{aligned}
\cos k\theta &= \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m}(i\sin\theta)^{2m}(\cos\theta)^{k-2m} \\
&= \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m}(\cos\theta)^{k-2m}(\cos^2\theta-1)^m \\
&= \sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m}(\cos\theta)^{k-2m}\sum_{l=0}^{m} C_m^l(-1)^l(\cos^2\theta)^{m-l} \\
&= \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^l(\cos\theta)^{k-2l}\sum_{m=l}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m}C_m^l \\
&= \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^l(\cos\theta)^{k-2l}\lambda_{k,l}.
\end{aligned}$$

由此可得 $x_k = (\sqrt{a^2+b})^k\sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^l\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b}}\right)^{k-2l}\lambda_{k,l}$

$$= \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^l a^{k-2l}(a^2+b)^l\lambda_{k,l}.$$

证法 2 前一个递推式即 $y_k=\frac{1}{b}(ax_k-x_{k+1})$，代入后一个递推式得

$$\frac{1}{b}(ax_{k+1}-x_{k+2})=x_k+\frac{a}{b}(ax_k-x_{k+1}).$$

化简得

$$x_{k+2}=2ax_{k+1}-(a^2+b)x_k.$$

这个线性递推关系的特征方程是 $t^2-2at+(a^2+b)=0$，它有两个不同的根 $a\pm i\sqrt{b}$



再结合初值 $x_0=1, x_1=ax_0-by_0=a$，利用待定系数法便可求出

$$x_k=\frac{1}{2}[(a+i\sqrt{b})^k+(a-i\sqrt{b})^k]=\sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^s C_k^{2s}a^{k-2s}b^s.$$

下面计算待证式右端中 $a^{k-2s}b^s$ 项的系数.

由于 $(a^2+b)^m=\sum_{r=0}^{m}C_m^r a^{2m-2r}b^r$，其中对 $a^{k-2s}b^s$ 作贡献的仅是 $r=s$ 的那项，因此所求的系数是

$$\sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^j C_j^s\lambda_{k,j}=\sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^j C_j^s\sum_{m=j}^{[\frac{k}{2}]}C_k^{2m}C_m^j=\sum_{j=s}^{[\frac{k}{2}]}\sum_{m=j}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^j C_j^s C_k^{2m}C_m^j$$
$$=\sum_{m=s}^{[\frac{k}{2}]}C_k^{2m}\sum_{j=s}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^j C_j^s C_m^j$$

易见 $C_j^sC_m^j=C_m^sC_{m-s}^{j-s}$，故当 $m>s$ 时有

$$\sum_{j=s}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^j C_j^s C_m^j=(-1)^s C_m^s\sum_{j=s}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^{j-s}C_{m-s}^{j-s}=(-1)^s C_m^s(1-1)^{m-s}=0.$$

从而，所求的系数恰是 $(-1)^s C_k^{2s}$.

(2) 下面给出两种风格不同的解法，前一种方法中蕴涵一些普遍性的结论，而后一种方法则较为朴素和自然.

证法 3　交换求和顺序可得

$$u_k=\sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]}\lambda_{k,j}=\sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]}\sum_{m=j}^{[\frac{k}{2}]}C_k^{2m}C_m^j=\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]}C_k^{2m}\sum_{j=0}^{m}C_m^j=\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]}C_k^{2m}2^m$$
$$=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^k+(1-\sqrt{2})^k].$$

令 $v_k=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^k-(1-\sqrt{2})^k]$，则 u_k, v_k 均为整数，且 $u_k+v_k\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^k$. 由于 $u_k+v_k\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^k$，且 $(u_k+v_k\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=u_{k+1}+v_{k+1}\sqrt{2}$，所以有递推关系

$$\begin{cases}u_{k+1}=u_k+2v_k,\\ v_{k+1}=u_k+v_k.\end{cases}$$

于是 $u_{k+1}\equiv u_k \pmod 2$.

又 $u_0=1$，所以 u_k 为奇数 $(k=0,1,2,\cdots)$. 由此可知 $z_{1,k}=1, k=0,1,2,\cdots$.

对任意非负整数 n 和 m，由于



$$u_{n+m}+\sqrt{2}v_{n+m}=(u_n+v_n\sqrt{2})(u_m+v_m\sqrt{2}).$$

因此,成立

$$\begin{cases}u_{n+m}=u_nu_m+2v_nv_m,\\ v_{n+m}=u_nv_m+u_mv_n.\end{cases}\qquad ①$$

特别地,当 $n=m$ 时有

$$\begin{cases}u_{2n}=u_n^2+2v_n^2,\\ v_{2n}=2u_nv_n.\end{cases}\qquad ②$$

显然,$v_0=0$,$v_1=1$。由②用归纳法易知对任何非负整数 m,$v_{2^m}=2^mt_m$,其中 t_m 为奇数。若 $v_a=2^{\lambda}k_1$,$v_b=2^{\mu}k_2$,其中 k_1,k_2 为奇数,λ,μ 为非负整数,且 $\lambda\neq\mu$,则由①可得 $v_{a+b}=2^{\gamma}k_3$,其中 k_3 为奇数,$\gamma=\min\{\lambda,\mu\}$。对任何正整数 n,存在非负整数 $m_1<m_2<\cdots<m_r$,使得 $n=2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_r}$。

故由以上讨论,并利用归纳法可得 $v_n=2^{m_1}k$,其中 k 为奇数,亦即下式成立:

$$2^m\mid v_n\Leftrightarrow 2^m\mid n.\qquad ③$$

设 m 为非负整数,由于 $u_0=1$ 以及②、③,用归纳法易知 $u_{2^m}\equiv1\pmod{2^m}$。从而,对任意非负整数 l,由①和③可得 $u_{l+2^m}=u_lu_{2^m}+2v_lv_{2^m}\equiv u_l\pmod{2^m}$,即 $\{x_k\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 为纯周期数列,2^m 为周期。现求其最小正周期 T_m。

由于 $x_k=1$,$k=0,1,2,\cdots$,所以 $T_1=1$。再由 $u_0=1$,$u_1=1$,$u_2=3$,$u_3=7$,可知 $T_2=4$。现讨论 $m\geqslant3$ 的情况。显然,$u_4=17\equiv1\pmod{2^4}$。由此及②,并用归纳法可知

$$u_{2^{m-1}}\equiv1\pmod{2^{m+1}},\ m\geqslant3.\qquad ④$$

于是,对非负整数 l,由①和④得当 $m\geqslant3$ 时,有 $u_{l+2^{m-1}}=u_lu_{2^{m-1}}+2v_lv_{2^{m-1}}\equiv u_l\pmod{2^m}$,即此时 2^{m-1} 也是 $\{x_k\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 的周期。

但可以证明当 $m\geqslant4$ 时,2^{m-2} 不是它的周期。事实上,取 l 为奇数,$u_{l+2^{m-2}}=u_lu_{2^{m-2}}+2v_lv_{2^{m-2}}$。由④得 $u_{2^{m-2}}\equiv1\pmod{2^m}$,再由③知 v_l 为奇数,2^{m-1} 不能整除 $v_{2^{m-2}}$,从而

$$u_{l+2^{m-2}}\not\equiv u_l\pmod{2^m}.$$

由于 T_m 必是 2^{m-1} 的因子,所以当 $m\geqslant4$ 时,$T_m=2^{m-1}$。当 $m=3$ 时,已知 $2^2=4$ 是 $\{x_k\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 的周期,并且 $T_2=4$,故必有 $T_3=4$。

总之,答案为

$$T_m=\begin{cases}2^{m-1}, & m\neq2,\\ 2^m, & m=2.\end{cases}$$

证法 4 根据(1)中证得的等式,当 $a=1$,$b=2$ 时 x_k 的值即为 u_k。在这里 b 可以取



负数是因为前面所作的推导本质上是代数式的运算. 于是由(1)中的方法2知数列$\{u_k\}$满足递推关系$u_{k+2}=2u_{k+1}+u_k$,并有通项公式

$$u_k=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^k+(1-\sqrt{2})^k]=\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_k^{2l}2^l$$

对于固定的m,我们考察无穷多个有序数对$(z_{m,k},z_{m,k+1})$,$k=0,1,2,\cdots$. 由于每个$z_{m,k}$均取值于0至2^m-1之间的有限个整数,故必存在正整数$k_1<k_2$使得

$$(z_{m,k_1},z_{m,k_1+1})=(z_{m,k_2},z_{m,k_2+1})$$

注意到$z_{m,k-1}\equiv z_{m,k+1}-2z_{m,k}(\bmod 2^m)$,因此亦有$z_{m,k_1-1}=z_{m,k_2-1}$. 以此类推,可得

$$(z_{m,0},z_{m,1})=(z_{m,k_2-k_1},z_{m,k_2-k_1+1}).$$

又数列$\{z_{m,k}\}$满足二阶线性递推关系,故它是以k_2-k_1为周期的纯周期数列.

为求出数列$\{z_{m,k}\}$的最小正周期T_m,我们先证明两个结论.

结论1:当$m\geqslant2$时,$2^{m+1}\mid u_{2^m}-1$.

事实上,

$$u_{2^m}-1=\sum_{l=1}^{2^{m-1}}\frac{2^m(2^m-1)(2^m-2)\cdots(2^m-2l+1)}{2l\cdot1\cdot2\cdot\cdots\cdot(2l-1)}2^l.$$

这个分式分子中的因式2^m-i与分母中的$i(1\leqslant i\leqslant2l-1)$所含的2的幂次相同,故上述和式每一项中所含的2的幂次

$$E(l)=m+l-1-(l\text{中所含的2的次幂}).$$

易见,$E(1)=E(2)=m$,所以前两项分别等于2^m乘以一个奇数,于是它们的和是2^{m+1}的倍数. 当$l\geqslant4$时,由于$l\leqslant2^{l-2}$,所以

$$E(l)\geqslant m+l-1-(l-2)=m+1$$

又$E(3)=m+2$,从而后面的每一项都能被2^{m+1}整除,命题得证.

结论2:当$m\geqslant3$时,$2^{m+1}\mid u_{2^m+1}-1$,2^{m+2}不能整除$u_{2^m+1}-1$.

类似地,$u_{2^m+1}-1=\sum_{l=1}^{2^{m-1}}\frac{(2^m+1)2^m(2^m-1)\cdots(2^m-2l+2)}{(2l-1)\cdot2l\cdot1\cdot\cdots\cdot(2l-2)}2^l$.

这个分式分子中的因式2^m-i与分母中的$i(1\leqslant i\leqslant2l-2)$所含的2的幂次相同,而$2^m+1$与$2l-1$均为奇数,故上述和式每一项中所含的2的幂次

$$F(l)=m+l-1-(l\text{中所含的2的幂次}).$$

当$l\geqslant6$时,由于$l\leqslant2^{l-3}$,因此$F(l)\geqslant m+l-1-(l-3)=m+2$.

而当$l=3,5$时,直接计算知$F(5)>F(3)=m+2$. 因此,为考察$u_{2^m+1}-1$对2^{m+2}的



整除性，只需看对应于 $l=1,2,4$ 的三项. 其中 $C^1_{2^{m-1}}\cdot 2^1=2^m(2^{m-1})$ 被 2^{m+2} 除的余数是 2^m

$$C^2_{2^{m-1}}\cdot 2^2=2^m\cdot\frac{(2^m+1)(2^m-1)(2^{m-1}-1)}{3}$$

此分式的分子和分母除以 4 的余数分别为 +1 和 -1，故该项除以 2^{m+2} 的余数为 2^m；注意到 $F(4)=m+1$，因此 $C^4_{2^{m-1}}\cdot 2^4$ 除以 2^{m+2} 的余数为 2^{m+1}. 从而 $u_{2^m}-1$ 除以 2^{m+2} 的余数恰为 2^{m+1}. 命题得证.

根据这两个论断，我们知道当 $m\geqslant5$ 时，

$$u_{2^{m-1}}\equiv u_0(\bmod 2^m),\ u_{2^{m-1}+1}\equiv u_1(\bmod 2^m).$$

又 $\{u_n\}$ 满足二阶线性递推关系，因此 2^{m-1} 是它的一个周期，于是 T_m 必为 2^{m-1} 的因数. 又 $u_{2^{m-2}+1}\not\equiv u_1(\bmod 2^m)$，所以 2^{m-2} 不是它的周期. 从而 $T_m=2^{m-1}(m\geqslant5)$.

当 $m\leqslant4$ 时，直接计算序列 $\{u_n\}$ 的前几项即可确定出 $T_1=1, T_2=4, T_3=4, T_4=8$.

说明 解数列题时，若能注意找到数列的周期性，可帮助我们快速、简捷地解决问题.

能力训练

1. (第10届"希望杯"高一竞赛题) 设 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，记 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[f\cdots f(x)]\}}_{n个f}$，则 $f_{1990}(x)=$ ( )

A. $-\frac{1}{x}$　　B. x　　C. $\frac{1+x}{1-x}$　　D. $\frac{x-1}{x+1}$

2. (第7届"希望杯"高一竞赛题) 已知函数 $f(n)=k$，k 是循环小数 $0.\dot{9}1827364\dot{5}$ 的小数点后的第 n 位数字，则 $\underbrace{f\{f\cdots f[f(1)]\}}_{[illegible]}$ 的值为 ( )

A. 9　　B. 7　　C. 3　　D. 4

3. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是单位长方体，黑白 2 蚁都从点 A 出发，沿棱向前爬行，每走完一条棱称为"走完一段". 白蚁爬行的路线是 $AA_1\to A_1D_1\to\cdots$，黑蚁爬行的路线是 $AB\to BB_1\to\cdots$，它们都遵循如下规则：所爬行的第 $i+2$ 段所在直线与第 i 段所在直线必须是异面直线(其中 $i\in\mathbf{N}$). 设黑白 2 蚁走完第 2008 段后，各停止在正方体的某个顶点处，这时黑白 2 蚁的距离是 ( )

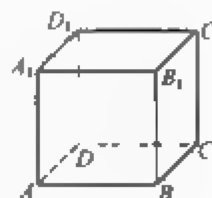


图 3-2-5

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 0



4. （第12届“希望杯”高一竞赛题）定义在实数集上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)=\frac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)}$，则 $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(2008)+2008$ 的值为（　　）

A. 2007　　B. 2008　　C. 2009　　D. 0

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2}, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 2(1-x), x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$，定义 $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，其中 $f_1(x)=f(x)$，则 $f_{2009}\left(\frac{1}{5}\right)$ 等于（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

6. （2007年浙江省高中数学竞赛A卷试题）$2007^{2007^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2007}}}}}$ 的末两位数字是（　　）

A. 01　　B. 07　　C. 43　　D. 49

7. 一同学在电脑中打出如下若干个圈（图中●表示实心圆，○表示空心圆）。

●○●●○●●●○●●●●○●●●●●○●●●●●●○

若将此若干个圆依次复制得到一系列圆，那么在前2008个圆中，有____个空心圆。

8. 地面上有 A、B、C 三点，一只青蛙位于地面上距离 C 点0.27米的 P 点，青蛙第一步从 P 跳到关于 A 的对称点 P_1，我们把这个动作说成青蛙从 P 点关于 A 点作“对称跳”；第二步从 P_1 出发对 B 点作对称跳到达 P_2；第三步从 P_2 点出发对 C 点作对称跳到达 P_3；第四步从 P_3 再对 A 作对称跳到达 P_4，…，按这种方式一直跳下去，若青蛙第2009步对称跳之后到达 P_{2009}，问此点与出发点 P 的距离为____厘米。

9. （第1届“希望杯”高一竞赛题改编）设函数 $f(n)=k$，其中 n 是自然数，k 是无理数 $\pi=3.1415926535\cdots$ 小数点后第 n 位的数字，并且规定 $f(0)=3$，设 $F_n=\underbrace{f\{f[f\cdots f}_{k}(n)\cdots]\}$，则 $F[f(1990)+f(5)+f(13)]=$____。

10. （1990年日本奥林匹克选拔赛试题）定义域为正整数的函数 $f(n)$ 满足：$f(n)=\begin{cases}n-3 & (n\geqslant1000)\\ f[f(n+7)] & (n<1000)\end{cases}$，则 $f(90)=$____。

11. 已知周期数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n=|x_{n-1}-x_{n-2}|(n\geqslant3)$，若 $x_1=1$，$x_2=a\geqslant0$，当该数列的最小正周期最小时，则数列的前2008项的和为____。

12. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是整数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，且满足

(1) $a_1=1$；

(2) $|a_i-a_{i+1}|\leqslant2$，$i=1,2,\cdots,n-1$。

上述排列的个数记为 $f(n)$，试判定 $f(2008)$ ______ 能否被 3 整除（填“能”或“不能”）

13. 整数数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 定义如下：$a_1=1$，对于 $n\geqslant 1$，a_{n+1} 是比 a_n 大的最小整数，且对所有的 $i,j,k\in\{1,2,\cdots,n+1\}$，满足 $a_i+a_j\neq 3a_k$，求 a_{2004} 的值。

14. 设 n 为正整数，规定：$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)\cdots]\}}_{n个f}$，已知：

$$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ x-1, & (1<x\leqslant 2).\end{cases}$$

(1) 解不等式：$f(x)\leqslant x$；

(2) 设集合 $A=\{0,1,2\}$，对任意 $x\in A$，证明：$f_3(x)\ \ x$；

(3) 探求 $f_{2007}\left(\dfrac{8}{9}\right)$ 的值；

(4) 若集合 $B=\{x|f_{12}(x)=x,x\in[0,2]\}$，证明：$B$ 中至少含 8 个元素。

15. （第 44 届 IMO 预选题）设 m 是一个大于 1 的固定整数，数列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 定义如下：

$$x_i=\begin{cases}2^i, & 0\leqslant i\leqslant m-1,\\ \sum\limits_{j=1}^{m}x_{i-j}, & i\geqslant m.\end{cases}$$

求 k 的最大值，使得数列中有连续的 k 项均能被 m 整除。



第[illegible]讲 函数周期性的综合应用

知识扫描

周期函数是描述客观世界中周期性运动变化规律的数学模型，有着广泛的实践意义和理论价值，周期函数和周期数列是高考和数学竞赛的重点考查内容。

我们研究函数周期性的目的，就是要系统地研究周期函数的性质，从有限推测无限。如果能够确定最小正周期，只要研究函数在一个最小正周期的范围内的图像与性质，就能推断出函数在整个定义域上的图像与性质，这给我们研究函数带来了方便。通过研究周期函数在一个周期内的性态，就能了解它在整个定义域上的性质；只要画出周期函数一个周期内的图像，然后经过周期延拓即可得到整个周期函数的图像。

函数周期性有着广泛的应用，不仅可以用它来描述现实世界中存在的大量的周期性现象，如地球、月亮、太阳的旋转；杭州附近的钱江潮汐；小球的单摆运动；弹簧的简谐振动等，利用周期性还是一种重要的思想方法，用它可以解决大量的数学问题，如：求函数值、求函数的解析式，判断函数的奇偶性、单调性，求单调区间，求最值，求简单函数方程的通解等。另外，周期性序列关系在图像压缩、分形几何及高等数学中有着大量的应用。只有深入研究，细细体会，才能把握事物周期变化的奥秘。

例题分析

例1 （2007年江西省文科高考试题）如图[illegible]，函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$（$x\in \mathbf{R}$，$\omega>0$，$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$）的图像与 y 轴相交于点 $(0,\sqrt{3})$，且该函数的最小正周期为 π。

（1）求 θ 和 ω 的值

(2) 已知点 $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，点 P 是该函数图像上一点，点 $Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点，当 $y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x_0\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，求 x_0 的值.

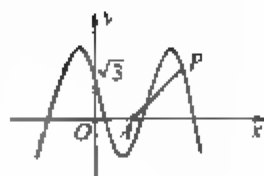


图4-1

解 (1) 将 $x=0$，$y=\sqrt{3}$ 代入函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ 中得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$. 由已知 $T=\pi$，且 $\omega>0$，得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

(2) 因为点 $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$Q(x_0,y_0)$ 是 PA 的中点，$y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以点 P 的坐标为 $\left(2x_0-\frac{\pi}{2},\sqrt{3}\right)$.

又因为点 P 在 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像上，且 $\frac{\pi}{2}\leqslant x_0\leqslant\pi$，所以 $\cos\left(4x_0-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{7\pi}{6}\leqslant 4x_0-\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{19\pi}{6}$，从而得 $4x_0-\frac{5\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$ 或 $4x_0-\frac{5\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$，即 $x_0=\frac{2\pi}{3}$ 或 $x_0=\frac{3\pi}{4}$.

例2 （第十届"希望杯"高一竞赛题）函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[0,1]$ 上恰好有50个最大值，则 ω 的取值范围是________.

解 设 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 是最小正周期，则 $\left(49+\frac{1}{4}\right)T=1$ 和 $\left(50+\frac{1}{4}\right)T=1$ 时分别有50个和51个最大值点. 当 T 增加时最大值个数或不变或减少.

故 $\omega\in\left[\frac{197\pi}{2},\frac{201\pi}{2}\right)$

评析 思考问题可从 $y=\sin x$ 在一个周期内有几个最大值点入手. 在长度为一个标准周期 2π 的区间内，在 $[0,2\pi)$ 内只有一个最大点 $x=\frac{\pi}{2}$，但在 $\left[\frac{\pi}{2},2\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内有两个最大点 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=2\pi+\frac{\pi}{2}$. 如果要出现连续的50个最大值，最小要包含49个周期的图像.

如：函数 $y=\sin x$ 在含49个周期的区间 $\left[\frac{\pi}{2},98\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上有50个最大值，在含49个多周期的区间 $\left[0,98\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 恰好有50个最大值. 一般地，只有在区间 $[0,a]$，$98\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant a<100\pi+\frac{\pi}{2}$ 上恰好有50个最大值. 这就让我们看清了问题的全貌.



本题问题相当于 $98\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega<100\pi+\frac{\pi}{2}$

思考　如果区间不是从0开始，如将问题改为

(1) 函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[1,2]$ 上恰好有50个最大值，则 ω 的取值范围是_______；

(2) 函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $(1,2]$ 上恰好有50个最大值，则 ω 的取值范围是_______；

(3) 函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $(1,2)$ 上恰好有50个最大值，则 ω 的取值范围是_______.

应怎么求解？

为了方便起见，可用补的方法，先将区间补成从0开始的完整区间 $[0,2]$ 进行思考，只要注意到端点1,2处是否是最大值点，而 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内的最大值点个数相同，不难求出 ω 的取值范围.

评析中采用的是特殊化策略，这是解题时常用的一种策略. 当我们面临的是一道结构复杂或难以入手的一般化的问题时，要注意从一般退到特殊，先考察包含在一般情形里的某些比较简单的特殊问题，以便从特殊问题的研究中，拓宽解题思路，发现原来问题的解题方向或途径. 将一般问题特殊化，只要对被研究的对象添加某些限制或适当加强某些条件，就可以得到各种不同的特殊问题. 在实际解题时，可从特殊值、特殊情形、特殊位置着手进行.

例3　(第12届"希望杯"高一竞赛题)某港口的水深 y(米)是时间 $t(0\leqslant t\leqslant 24$，单位：小时)的函数，下面是该港口的水深表：

t(小时)	0	…	3	…	9		15	
y(米)	10	…	13		7		13	

经长时间的观察，描出的曲线如图4-1-2所示，经拟合，该曲线可近似地看成正弦函数 $y=A\sin\omega t+B$ 的图像.

(1) 试根据数据表和曲线，求出函数 $y=A\sin\omega t+B$ 的表达式；

(2) 一般情况下，船舶航行时船底同海底的距离不小于4.5米时是安全的. 如果某船的吃水深度(船底与水面的距离)为7米，那么该船在什么时间能够安全进港？若该船欲当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过多长时间？(忽略离港所需的时间)

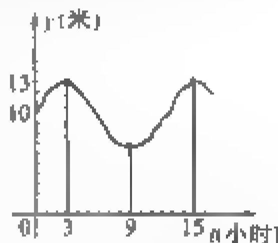


图4-1-2

解 (1) 由条件易得

$$A=3,\text{最小正周期 } T=12, B=10,$$

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$，所以 $y=3\sin\frac{\pi t}{6}+10$.

(2) 不妨设 $0\leqslant t\leqslant 12$，要使该船安全进港，则必须使

$$3\sin\frac{\pi t}{6}+10\geqslant 7+4.5,$$

所以 $$\sin\frac{\pi t}{6}\geqslant\frac{1}{2}.$$

因为 $$0\leqslant\frac{\pi t}{6}\leqslant 2\pi,$$

所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi t}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，即 $1\leqslant t\leqslant 5$.

所以该船安全进港的时间为 1:00 至 5:00 或 13:00 至 17:00.

如果该船要在当天离港，它可以在 1:00 进港，傍晚 17:00 离港，故在港内停留的时间最多不能超过 16 个小时.

例 4 求 $\sin x=\lg x$ 的解的个数.

分析 这是一个超越方程，无法用初等方法求其解(从而确定解的个数).

设 $y=\sin x=f_1(x)$，$y=\lg x=f_2(x)$，则原方程解的个数便转化为两个函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 图像的交点的个数，而在一定范围内曲线交点存在性及其个数的讨论又依赖于函数性质的代数分析.

解 令 $y_1=f_1(x)=\sin x$，$y_2=f_2(x)=\lg x$，在同一直角坐标系内作出这两个函数的图像(如图 4-1-3，由定义域限制可仅考虑 $x>0$ 的部分).

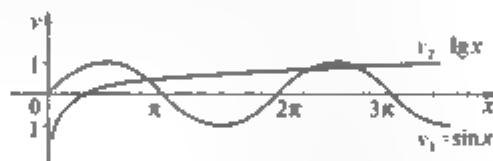


图 4-1-3

由图像可知，$y_1=\sin x$ 与 $y_2=\lg x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\left(2\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$，$\left(\frac{5}{2}\pi,3\pi\right)$ 内各有一个交点，而在其余的区间内不相交. 如果例 4 是一个填空或选择题，到此就得到了解答，但这里例 4 完整的解答还须借助于函数性质的讨论. 令 $y=F(x)=y_1-y_2=\sin x-\lg x$，我们以区间 $(0,\pi]$ 为例进行讨论.



当 $x\in(0,1)$ 时，$y_1=\sin x>0$，$y_2=\lg x<0$，所以 $y=y_1-y_2>0$，故 $y=F(x)$ 图像在 $(0,1)$ 内与 x 轴无交点；

当 $x\in\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，

$$y_1=\sin x\geq\sin 1>\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y_2=\lg x\leq\lg\frac{\pi}{2}<\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $y=y_1-y_2>0$，故 $y=F(x)$ 的图像与 x 轴在 $\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ 内无交点；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$y_1=\sin x$ 为单调递减函数，$y_2=\lg x$ 为单调递增函数，

所以 $y=F(x)=\sin x-\lg x$ 为单调递减函数，

且 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\lg\frac{\pi}{2}=1-\lg\frac{\pi}{2}>0$，

$F(\pi)=\sin\pi-\lg\pi=-\lg\pi<0$.

由函数连续单调性知，存在唯一的 x_0 使得 $F(x_0)=0$，所以在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内，$y=F(x)$ 图像与 x 轴有且仅有一个交点。

故在区间 $(0,\pi]$ 内，$y=F(x)$ 图像与 x 轴有且仅有一个交点，即 $y_1=\sin x$ 与 $y_2=\lg x$ 有且仅有一个交点，其他区间上的情形可作类似讨论。

综合得：$y_1=\sin x$ 与 $y_2=\lg x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$，$\left(2\pi,\frac{5}{2}\pi\right]$，$\left(\frac{5}{2}\pi,3\pi\right]$ 内各有一个交点，而在其余区间内不相交，所以原方程解的个数为3.

思考 若将方程改为：$2\sin x=\lg x$，则它的根的个数是多少？

提示 当 $x>100$ 时，$\lg x>\lg 100=2\geq 2\sin x$，所以 $x>100$ 时，函数 $y=\lg x$ 的图像恒在函数 $y=2\sin x$ 的图像的上方，当 $x\in[1,100]$ 时，这两个函数的图像总有交点，当 $x\in(100,+\infty)$ 时，这两个函数的图像就没有交点了，因此，只要求出 $x\in[1,100]$ 上两个函数图像的交点就行了，根据正弦函数的周期性可以算出它们的交点个数是31个。

一般地，对于给定的正整数 k，方程

$$k\sin x=\lg x$$

的根的个数是多少？这是一个还未解决的问题，留待有兴趣的读者研究解决。

例5 已知 $f(x)=a\tan x+b\sin x+1$，且 $f(4)=5$，求 $f(2\pi-4)$ 的值。

分析 此题不是简单的求值问题，还要求出函数的一个周期，并判断奇偶性。



解 令 $g(x)=a\tan^3 x+b\sin x$,

所以 $g(2\pi+x)=a\tan^3(2\pi+x)+b\sin(2\pi+x)=g(x)$,

所以 $g(x)$的一个周期 $T=2\pi$.

又因为 $g(-x)=a\tan^3(-x)+b\sin(-x)=-g(x)$,

所以 $g(x)$是奇函数,即 $g(2\pi-4)=g(-4)=-g(4)$.

所以 $f(x)=g(x)+1$,故 $5=g(4)+1$,即 $g(4)=4$,于是 $g(2\pi-4)=-4$,

所以 $f(2\pi-4)=g(2\pi-4)+1=-4+1=-3$.

例6 设 t_1,t_2 是方程 $t^2-(5a-2)t-3a^2-7a+1=0$ 的两个不等的实根,求实数 a 的值,使得对于任何非零实数 m,函数 $f(x)=\cos(m\pi x)\cos[(t_1^3+t_2^3)\pi x]$是周期函数.

解 设 T 是函数 $f(x)$的最小正周期,则有 $f(T)=f(0)$,即 $\cos(m\pi T)\cos[(t_1^3+t_2^3)\pi T]=1$.由余弦函数的有界性得 $\begin{cases}|\cos(m\pi T)|=1,\\ |\cos[(t_1^3+t_2^3)\pi T]|=1.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}m\pi T=k_1\pi,\\ (t_1^3+t_2^3)\pi T=k_2\pi\end{cases}$ $(k_1,k_2\in\mathbf{Z},k_1\neq0)$,故 $\dfrac{t_1^3+t_2^3}{m}=\dfrac{k_2}{k_1}$,即对于任何非零实数 m,$\dfrac{t_1^3+t_2^3}{m}$均为有理数,故只能有 $t_1^3+t_2^3=0$,即$(t_1+t_2)(t_1^2-t_1t_2+t_2^2)=0$.

因为 $t_1,t_2\in\mathbf{R}$,且 $t_1\neq t_2$,所以 $t_1^2-t_1t_2+t_2^2\neq0$,故 $t_1+t_2=0$,由韦达定理得 $5a-2=0$,即 $a=\dfrac{2}{5}$.

说明 初看此题似乎无从下手,但通过巧设周期、结合三角函数的有界性及韦达定理便可获解,真可谓"山重水复疑无路,柳暗花明又一村",令人拍案叫绝.

例7 (2005年福建省高考题)$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上以3为周期的奇函数,且 $f(2)=0$,则方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,6)$内解的个数的最小值是 ( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 7

解 由 $f(-x)=-f(x)$,$f(x+3)=f(x)$,知 $f(x)$的图像关于点$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$对称,即 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$.又 $f(2)=0$,由对称性知 $f(1)=0$.由 $f(3)=f(0)=0$,故在一个周期段$(0,3]$内,方程 $f(x)=0$ 的解有四个:$x=1$,$x=\dfrac{3}{2}$,$x=2$,$x=3$.从而由一个周期是3知在区间$(3,6)$内,方程 $f(x)=0$ 的解有3个:$x=4$,$x=\dfrac{9}{2}$,$x=5$.因此,方程在$(0,6)$内解的个数的最小值是7.故选D.

思考 符合上例所列条件的函数 $f(x)$是否存在?要满足:

(1) $f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$.



(2) $f(x)$为周期函数且一个周期为 3.
(3) $f(x)$为定义域上的奇函数
(4) $f(2)=0$.
(5) 使方程 $f(x)=0$ 在区间(0,6)内恰有 7 个解.

解 (用构造法)构造函数

$$f(x)=A\sin\pi x\cos\frac{\pi}{3}x,(A\text{ 为常数},x\in\mathbf{R}).$$

容易验证
(1) $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$.
(2) $f(x)$在定义域内以 3 为周期.

因为 $f(x+3)=A\sin\pi(x+3)\cos\frac{\pi}{3}(x+3)$

$$=A\sin(3\pi+\pi x)\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}x\right)$$

$$=A(-\sin\pi x)\left(-\cos\frac{\pi}{3}x\right)$$

$$=A\sin\pi x\cos\frac{\pi}{3}x$$

$$=f(x).$$

所以 $f(x)$在定义域内以 3 为周期.
(3) $f(x)$为奇函数.

因为 $f(-x)=A\sin(-\pi x)\cos\left(-\frac{\pi}{3}x\right)=A(-\sin\pi x)\cos\frac{\pi}{3}x=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数.

(4) $f(2)=0$.
(5) $f(x)=0$ 在区间(0,6)内有 7 个解,分别为 $x=1,1.5,2,3,4,4.5,5$.
这时我们可以说 $f(x)=0$ 在区间(0,6)内解的最小值为 7,其图像如图 4-1-4 所示.

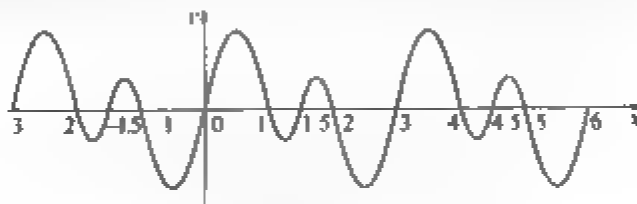


图 4-1-4

这样就给出了例 7 中所述抽象函数的一个具体实例.



例8 设$f(x)$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$上以2为周期的函数，对$k\in \mathbf{Z}$，用I_k表示区间$(2k-1,2k+1]$，已知当$x\in I_0$时，$f(x)=x^2$.

(1) 求$f(x)$在I_k上的解析表达式；

(2) 对正整数k，求集合$M_k=\{a\mid$使方程$f(x)=ax$在I_k上有两个不相等的实根$\}$

分析 这是一道令人感到困惑的问题，究其原因主要是对I_k、M_k这样的符号的意义缺乏了解。对于关键符号，如果感到抽象和陌生，那么有效的做法是将它的含义具体化。例如"I_k表示区间$(2k-1,2k+1]$"，即是$I_1=(1,3]$，$I_2=(3,5]$，…，$I_k=(2k-1,2k+1]$。如果对于"求$f(x)$在I_k上的解析式"有困难，那么根据题设"$f(x)$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$上以2为周期的函数"，可从I_1、I_2等区间的考察去探求$f(x)$在I_k上的解析式.

解 (1) 在$I_0=(-1,1]$上，$f(x)=x^2$；

在$I_1=(1,3]$上，由周期性，相当于将$y=x^2$的图像向右平移2个单位，得

$$f(x)=(x-2)^2;$$

在$I_2=(3,5]$上，同理，相当于将$y=x^2$的图像向右平移4个单位，得

$$f(x)=(x-4)^2.$$

由以上具体化的推导，即可得在$I_k=(2k-1,2k+1]$上，

$$f(x)=(x-2k)^2.$$

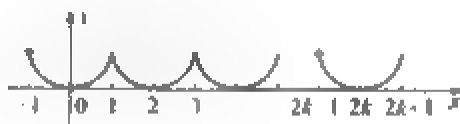


图1-1-3

评析 周期函数的几何特征是每个周期上的函数图像是相同的图形，故先画出一个周期内的图像，然后将图像平移周期的整数倍，可得到所需范围的图像，最后借助于图形，利用数形结合思想求解，既直观，又浅显.

别解 因$f(x)$是以2为周期的函数，所以当$k\in \mathbf{Z}$时，$2k$是$f(x)$的一个周期，又$x\in I_k$时，$x-2k\in I_0$，故$f(x)=(x-2k)^2$，即对$k\in \mathbf{Z}$，$x\in I_k$时，$f(x)=(x-2k)^2$.

(2) 求$M_k=\{a\mid$使方程$f(x)=ax$在I_k上有两个不相等的实根$\}$，同样可先将方程$f(x)=ax$具体化为$(x-2k)^2=ax$，于是问题就转化为使该方程在$(2k-1,2k+1]$上有两个不相等的实根，求a的取值范围.

事实上，令$y=ax$，$y=(x-2k)^2$，要求这两个函数图像在区间$(2k-1,2k+1]$上有两个不同的交点，便可确定一次函数$y=ax$的斜率a的取值范围.



如图 4-1-6，当 $a>0$，且 $a\leqslant k'$（k' 是过原点 O 和点 $A(2k+1,1)$ 的直线的斜率）时，函数 $y=ax$，$y=(x-2k)^2$ 的图像在区间 $(2k-1,2k+1]$ 上有两个不同的交点.

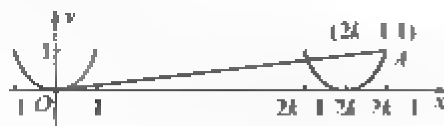


图 4-1-6

因为直线 OA 的方程为 $y=\frac{1}{2k+1}x$，所以 $k'=\frac{1}{2k+1}$，故 $0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$.

即所求集合

$$M_k=\left\{a\,\middle|\,0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}\right\}.$$

说明 本题问题中出现比较陌生的、抽象的词语、记号，这类问题往往有数学背景，课本中无现成的概念或记号，理解这些陌生、抽象的词语、记号便成为解题关键.

在剖析关键字句时，如果涉及的词语、符号比较抽象，如本题，那么将它们具体化便是一种有效的策略.较常见的做法是从特殊值入手，或用直观图像来加以表示.

数学题往往要变换概念的表现形式，精简命题从条件到结论的中间环节，分解命题的各项条件之间的联系，隐去问题涉及的数学思想及背景.因此解题时，就需要透过字句发掘这些本质与规律，对关键字句进行仔细推敲.

例 9 （2005 年上海市高考题）在直角坐标平面中，已知点 $P_1(1,2)$，$P_2(2,2^2)$，$P_3(3,2^3)$，…，$P_n(n,2^n)$，其中 n 是正整数.对平面上任一点 A_0，记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点，A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点，…，A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.

(1) 求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标.

(2) 当点 A_0 在曲线 C 上移动时，点 A_2 的轨迹是函数 $y=f(x)$ 的图像，其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数，且当 $x\in(0,3]$ 时，$f(x)=\lg x$.求以曲线 C 为图像的函数在 $(1,4]$ 的解析式.

(3) 对任意偶数 n，用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标.

解 (1) 设点 $A_0(x,y)$，A_0 关于点 P_1 的对称点 A_1 的坐标为 $A_1(2-x,4-y)$，A_1 关于点 P_2 的对称点 A_2 的坐标为 $A_2(2+x,4+y)$，所以 $\overrightarrow{A_0A_2}=(2,4)$.

(2) 因为 $\overrightarrow{A_0A_2}=(2,4)$，所以 $f(x)$ 的图像由曲线 C 向右平移 2 个单位，再向上平移 4 个单位得到.因此，曲线 C 是函数 $y=g(x)$ 的图像，其中 $g(x)$ 是以 3 为周期的周期函数，且当 $x\in(-2,1]$ 时，$g(x)=\lg(x+2)-4$.于是当 $x\in(1,4]$ 时，$g(x)=\lg(x-1)-4$.



(3) $\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$，由于$\overrightarrow{A_{2k-2}A_{2k}}=2\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0A_n}&=2(\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_3P_4}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n})\\&=2[(1,2)+(1,2^3)+\cdots+(1,2^{n-1})]\\&=2\left(\frac{n}{2},\frac{2(2^n-1)}{3}\right)=\left(n,\frac{4(2^n-1)}{3}\right)\end{aligned}$$

例 10 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，其图像关于直线$x=1$对称，对任意x_1，$x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$。

(Ⅰ) 设$f(1)=2$，求$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{4}\right)$；

(Ⅱ) 证明$f(x)$是周期函数

分析 (Ⅰ) 从条件$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$及$f(1)=2$出发，类比联想到指数函数$f(x)=2^x$，则可类比猜测：$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}$。

事实上当$x\in[0,1]$时，$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant0$，

而$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=2$，

所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}$，同理可得$f\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}$。

(Ⅱ) 由题意，可类比联想到$f(x)=\cos x$，它是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，其图像有对称轴$x=\pi$，2π是它的一个周期，2π是π的2倍，通过类比可猜测：$f(x)$的一个周期可能是2。

解 (Ⅰ) 令$x_1=x_2=\frac{x}{2}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，即$x\in[0,1]$，

有 $$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant0,x\in[0,1]。$$

$$a=f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)，$$

所以 $$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{a}。$$

$$\sqrt{a}=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{4}\right)，$$

所以 $$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{a}$$



(2) 因为 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，所以

$$f(1+x)=f(1-x),x\in\mathbf{R},$$

于是 $f(x)=f(2-x),x\in\mathbf{R}$.

又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，故

$$f(-x)=f(2-x),x\in\mathbf{R},$$

即 $f(x)=f(x+2),x\in\mathbf{R}$.

这就表明 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，2 是它的一个周期.

(3) 由(1)知，$f(x)\geqslant 0,x\in[0,1]$. 因为

$$\begin{aligned}\sqrt{a}&=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(n\cdot\frac{1}{2n}\right)=f\left[\frac{1}{2n}+(n-1)\frac{1}{2n}\right]\\&=f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot f\left[(n-1)\frac{1}{2n}\right]\\&=\cdots\\&=f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot\cdots\cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)\\&=\left[f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^n,\end{aligned}$$

故
$$f\left(\frac{1}{2n}\right)=a^{\frac{1}{2n}}.$$

又由(2)知，$f(x)$ 是一个周期函数，2 是它的一个周期，所以

$$f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}\right),$$

故
$$a_n=a^{\frac{1}{2n}}.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}(\ln a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\ln a\right)=0.$$

评析　抽象函数是一种未给出具体解析式的函数，其表达形式的抽象和性质的隐含不露，使得直接求解的思路常难以寻求. 其实，大量的抽象函数都是以中学阶段所学的基本函数为背景抽象而成的，我们称这些基本函数为背景函数. 解题时若能根据题设条件，通过类比、联想，猜想出它可能为某种基本函数或者与某种基本函数具有部分甚至全部的类似性质，然后从这一抽象函数的背景函数入手，就能变抽象为具体，从而会使解题思路自然而来. 比如，本题中的指数函数 $f(x)=2^x$ 和余弦函数 $f(x)=\cos x$.

例 11　(第十六届"希望杯"高二竞赛题) 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n-a_{n+1}=a_{n+1}+3a_na_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；



(2) 已知 $y=f(x)$ 是偶函数，且对任何 x 都有 $f(1+x)=f(1-x)$，当 $x\in[-2,-1)$ 时，$f(x)=\log_2|x+1|$. 求使 $f(x)+a_n<0(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立的 x 的取值范围.

解 (1) 因为
$$a_n-a_{n+1}=a_{n+1}+3a_na_{n+1},$$
所以
$$a_n=2a_{n+1}+3a_na_{n+1}=a_{n+1}(2+3a_n),$$
即
$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+3,$$
所以 $\frac{1}{a_{n+1}}+3=2\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$，$a_1=1$，$\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，所以
$$\frac{1}{a_n}+3=4\times2^{n-1}=2^{n+1},$$
即
$$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

(2) 因为 $f(x+2)=f[1+(x+1)]=f[1-(x+1)]=f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数. 先求出 $x\in(-1,1)$ 时，不等式 $f(x)+a_n<0$ 的解集.

当 $x\in[0,1)$ 时，$x-2\in[-2,-1)$，

所以 $f(x)=f(x-2)=\log_2|(x-2)+1|=\log_2|x-1|=\log_2(1-x)$.

因为 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$，

所以 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

故 $a_n\leqslant a_1=1$，$-a_n\geqslant-1$.

要使 $f(x)+a_n<0$，即 $f(x)<-a_n$ 在 $[0,1)$ 上恒成立，只须 $f(x)<-1$，即
$$\log_2(1-x)<-1,$$
解得
$$\frac{1}{2}<x<1.$$

因为 $y=f(x)$ 是偶函数，故当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=\log_2(1+x)$，

同上有 $\log_2(1+x)<-1$，

解得 $-1<x<-\frac{1}{2}$.

由于 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，因此，使 $f(x)+a_n<0(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立的自变量 x 的取值范围是
$$\left\{x\,\middle|\,-1+2k<x<-\frac{1}{2}+2k,k\in\mathbf{Z}\right\}\text{ 或 }\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}+2k<x<1+2k,k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

例 12 (2007 年全国联赛题) 设函数 $f(x)$ 对所有的实数 x 都满足 $f(x+2\pi)=f(x)$，求证：存在 4 个函数 $f_i(x)(i=1,2,3,4)$ 满足：



(1) 对 $i=1,2,3,4$，$f_i(x)$是偶函数，且对任意实数 x，有 $f_i(x+\pi)=f_i(x)$；

(2) 对任意的实数 x，有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)\cos x+f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$.

证明 记 $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$，且 $g(x)$是偶函数，$h(x)$是奇函数，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$g(x+2\pi)=g(x)$，$h(x+2\pi)=h(x)$. 令

$$f_1(x)=\frac{g(x)+g(x+\pi)}{2},$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-g(x+\pi)}{2\cos x}, & x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\\ 0, & x=k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\frac{h(x)-h(x+\pi)}{2\sin x}, & x\neq k\pi\\ 0, & x=k\pi\end{cases}$$

$$f_4(x)=\begin{cases}\frac{h(x)+h(x+\pi)}{2\sin 2x}, & x\neq \frac{k\pi}{2}\\ 0, & x=\frac{k\pi}{2}\end{cases}$$

其中 k 为任意整数.

容易验证 $f_i(x)(i=1,2,3,4)$是偶函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f_i(x+\pi)=f_i(x)(i=1,2,3,4)$.

下面证明对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.

当 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$时，显然成立；

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$时，因为 $f_1(x)+f_2(x)\cos x=f_1(x)=\frac{g(x)+g(x+\pi)}{2}$，

而 $g(x+\pi)=g\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=g\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi\right)=g\left(-k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=g(x)$，

故对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.

下面证明对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=h(x)$.

当 $x\neq\frac{k\pi}{2}$时，显然成立；

当 $x=k\pi$ 时，$h(x)=h(k\pi)=h(k\pi-2k\pi)=h(-k\pi)=-h(k\pi)$，所以 $h(x)=h(k\pi)=0$，而此时 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=0$，故 $h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$；

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$时，$h(x+\pi)=h\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=h\left[k\pi+\frac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi\right]=h\left(-k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$



$h\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-h(x)$

故 $f_3(x)\sin x=\frac{h(x)-h(x+\pi)}{2}=h(x)$，又 $f_4(x)\sin 2x=0$，从而有 $h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\cdot\sin 2x$。

于是，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，我们有 $h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$

综上所述，结论得证

说明 1994 年有这样一道高考题：

定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和 如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，那么 ( )

A. $g(x)=x$，$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

B. $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$，$h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

C. $g(x)=\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

D. $g(x)=-\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

受这道高考题的启示，注意到 $f_1(x)+f_2(x)\cos x$ 为偶函数，$f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$ 为奇函数，可得。

巧思妙解 由条件(1)，得 $f_i(-x)=f_i(x)=f_i(\pi+x)$。

在上式中，用 $-x$ 代替 x，得

$$f_i(x)=f_i(-x)=f_i(\pi-x).$$

所以 $f_i(x)=f_i(-x)=f_i(\pi+x)=f_i(\pi-x)(i=1,2,3,4)$。

在条件(2)中，分别用 x、$-x$、$\pi+x$、$\pi-x$ 代替 x，并结合 $f(x)$ 为偶函数及诱导公式，得

$$\begin{cases}f(x)=f_1(x)+f_2(x)\cos x+f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x, & ①\\ f(-x)=f_1(x)+f_2(x)\cos x-f_3(x)\sin x-f_4(x)\sin 2x, & ②\\ f(\pi+x)=f_1(x)-f_2(x)\cos x-f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x, & ③\\ f(\pi-x)=f_1(x)-f_2(x)\cos x+f_3(x)\sin x-f_4(x)\sin 2x. & ④\end{cases}$$

①+②+③+④、①+②-③-④、①-②-③+④、①-②+③-④，得

$$\begin{cases}4f_1(x)=f(x)+f(-x)+f(\pi+x)+f(\pi-x),\\ 4f_2(x)\cos x=f(x)+f(-x)-f(\pi+x)-f(\pi-x),\\ 4f_3(x)\sin x=f(x)-f(-x)-f(\pi+x)+f(\pi-x),\\ 4f_4(x)\sin 2x=f(x)-f(-x)+f(\pi+x)-f(\pi-x)\end{cases}$$



所以
$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)+f(\pi+x)+f(\pi-x)}{4}, \quad ⑤$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)-f(\pi+x)-f(\pi-x)}{4\cos x}\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), & ⑥\\[2ex] 0\left(x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), & ⑦\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(-x)-f(\pi+x)+f(\pi-x)}{4\sin x}(x\neq k\pi), & ⑧\\[2ex] 0(x=k\pi), & ⑨\end{cases}$$

$$f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(-x)+f(\pi+x)-f(\pi-x)}{4\sin 2x}\left(x\neq \dfrac{k\pi}{2}\right), & ⑩\\[2ex] 0\left(x=\dfrac{k\pi}{2}\right), & ⑪\end{cases}$$

其中 $k\in \mathbf{Z}$.

显然，当 $f_i(x)(i=1,2,3,4)$ 分别取⑤、⑥、⑧、⑩时，同时满足条件(1)、(2).

当 $f_i(x)(i=1,2,3,4)$ 分别取⑤、⑦、⑨、⑪时，验证其满足条件(1)、(2)同基本解法，略.

例 13 (1999 年 IMO 预选题)假设每个整数被染上红、蓝、绿或黄色中的一种，x、y 是奇数，且 $|x|\neq|y|$. 证明存在两个同色的整数，它们的差等于 x、y、$x+y$ 或 $x-y$ 中的一个.

证明 假设存在一个颜色函数 $f: Z\to\{R,B,G,Y\}$，使得对任意整数 a，有

$$f\{a,a+x,a+y,a+x+y\}=\{R,B,G,Y\},$$

其中 R 表示红色，B 表示蓝色，G 表示绿色，Y 表示黄色. 设 $g: Z\times Z\to\{R,B,G,Y\}$，且

$$g(i,j)=f(ix+jy).$$

于是，在平面直角坐标系中的每个单位正方形的顶点有四种不同的颜色.

(1) 如果存在一列整数对 $\{i\}\times Z$，使得 $g|_{\{i\}\times Z}$ 不是以 2 为周期的周期函数，则存在一行整数对 $Z\times\{j\}$，使得 $g|_{Z\times\{j\}}$ 是以 2 为周期的周期函数.

实际上，如果 $g|_{\{i\}\times Z}$ 不是以 2 为周期的周期函数，则在这一列中一定有三个相邻的整点的颜色互不相同，不妨设为 $\begin{matrix}Y\\B\end{matrix}$. 考虑与之相邻的单位正方形的顶点，有 $\begin{matrix}RYR\\GBGR\\YRY\end{matrix}$，进而有 $\begin{matrix}YRYRY\\BGBGB\\RYRYR\end{matrix}$ 等. 于是，我们得到三行整数对，使得 g 分别限制在这三行上的函数是以 2 为周期的周期函数.



(2) 如果对于一个整数 i，$g_i=g(i,x)$ 是以 2 为周期的周期函数，则对每一个 $j\in Z$，$g_j=g(j,x)$ 是以 2 为周期的周期函数. 若 $i\equiv j \pmod 2$，则 g_j 的值域与 g_i 的值域相同；若 $i\not\equiv j \pmod 2$，则 g_j 的值域为与 g_i 的值域相异的另两个值.

实际上，对于第 i 行上的整点，不妨假设为 $\cdots RBRBRB\cdots$，运用单位正方形顶点的性质，有 $\begin{matrix}\cdots YGYGY\cdots\\ \cdots RBRBR\cdots\end{matrix}$，进而有

$$\begin{matrix}\cdots RBRBR\cdots\\ \cdots YGYGY\cdots\\ \cdots RBRBR\cdots\end{matrix}\quad\text{或}\quad\begin{matrix}\cdots BRBRB\cdots\\ \cdots YGYGY\cdots\\ \cdots RBRBR\cdots\end{matrix}$$

对于第 i 行下面的情况，可以得到同样的结论.

改变行和列可得与(1)、(2)同样的结论. 假设行是以 2 为周期的，且 $g(0,1)=R$，$g(1,0)=B$，于是 $g(y,0)=B$，其中 y 是奇数. 若 x 为奇数，则 $g(Z\times\{x\})=\{Y,G\}$. 由于 $g(y,0)=f(x,y)=g(0,x)$，矛盾.

设含奇数个元素的子集为 X_1，则 X_1 与 X_2 的并集便是一个奇子集. 反之，S_n 的任一奇子集可写成 X_1 与 X_2 之并.

X_2 的取法有 2^k 种.

X_1 的取法有

$$\begin{aligned}&C_l^1+C_l^3+\cdots+C_l^{2i-1}\ (2i-1\text{ 是不大于 } l \text{ 的最大奇数})\\ =&\frac{1}{2}(C_l^0+C_l^1+\cdots+C_l^l)\\ =&2^{l-1}(\text{种}).\end{aligned}$$

于是

$$a_n=2^k\cdot 2^{l-1}=2^{n-1}. \quad ①$$

由①式知

$$b_n=a_n=2^{n-1}$$

(3) 设 $A_n(B_n)$ 表示 S_n 中全体奇(偶)子集容量之和.

若 n 为奇数($n\geqslant 3$).

S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成：① S_{n-1} 的奇子集 ② S_{n-1} 的每一个偶子集与集$\{n\}$的并. 于是

$$A_n=A_{n-1}+(B_{n-1}+nb_{n-1})=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}.\ (\text{由(1)的结论}) \quad ②$$

类似可得

$$B_n=B_{n-1}+(A_{n-1}+n\cdot a_{n-1})=A_{n-1}+B_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}. \quad ③$$



对照式②、③，得

$$A_n=B_n$$

若 n 是偶数($n\geqslant 4$)，

S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成：① S_{n-1} 的所有奇子集；② S_{n-1} 的每一个奇子集与集 $\{n\}$ 的并，于是

$$A_n=A_{n-1}+(A_{n-1}+n\cdot 2^{n-2})=2A_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}. \quad ④$$

类似可得

$$B_n=2B_{n-1}+n\cdot 2^{n-2}. \quad ⑤$$

由④、⑤ $A_{n-1}=B_{n-1}$，便得 $A_n=B_n$。

综上所述，证得，对任何 $n\geqslant 3$，$A_n=B_n$。

(4) X 在 S_n 的余集记为 $\overline{X}$，则 X 与 $\overline{X}$ 的容量之和等于 S_n 的容量，即 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。因此，$S_n$ 中所有子集的容量之和是

$$2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=2^{n-2}\cdot n(n+1).$$

因 $A_n=B_n$，故

$$A_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-2}\cdot n(n+1)=2^{n-3}n(n+1),\ n\geqslant 3.$$

能力训练

1. 若 $y=f(2x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{a}{2}$ 和 $x=\frac{b}{2}$ $(b>a)$ 对称，则 $f(x)$ 的一个周期为 ( )

A. $\frac{a+b}{2}$　　B. $2(b-a)$

C. $\frac{b-a}{2}$　　D. $4(b-a)$

2. (2006年全国高中数学联合竞赛浙江省预赛试题)设 $f(n)$ 为正整数 n(十进制)的各位上数字的平方之和，比如 $f(123)=1^2+2^2+3^2=14$，记 $f_1(n)=f(n)$，$f_{k+1}(n)=f(f_k(n))$，$k=1,2,3,\cdots$，则 $f_{2006}(2006)$ 的值是 ( )

A. 20　　B. 4　　C. 42　　D. 145

3. (第8届“希望杯”高二竞赛题)方程 $\cos x=x+\sin x$ 的实根个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. (2004年福建省竞赛题)两个周期函数 y_1, y_2 的最小正周期分别为 a, b, 且 $b=na$ ($n\geq 2$, n 为整数). 如果函数 $y_3=y_1+y_2$ 的最小正周期为 t, 那么五种情形“$t<a$”, “$t=a$”, “$a<t<b$”, “$t=b$”, “$t>b$”中, 不可能出现的情形的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. (第12届“希望杯”高一竞赛题)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, $A,\varphi\in\mathbf{R}$. 要使 $f(x)$ 的最小正周期 $T\in\left(\frac{1}{100},\frac{1}{50}\right)$, 则正整数 ω 可取的值的集合中元素的数目是 ( )

A. 311　　B. 312　　C. 313　　D. 314

6. 已知在函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{R}$ 的图像上, 相邻的一个最高点和一个最低点恰好在 $x^2+y^2=R^2$ 上, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ( )

A. 8　　B. 4　　C. 2　　D. 1

7. 函数 $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$ 的最大值和最小正周期之和为______.

8. 偶函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R, 其图像关于直线 $x=2$ 对称, 已知 $x\in(-2,2)$ 时, $f(x)=-x^2+1$, 则在区间 $(4k-2,4k+2)(k\in\mathbf{Z})$ 上 $f(x)$ 的解析式为______.

9. 函数 $f(x)=|\sin x|+\sin^4 2x+|\cos x|$ 的最大值与最小值之差等于______.

10. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f(x+1)=f(x-1)$, $1\leq x\leq 2$ 时, $f(x)=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$), 则当 $-1\leq x\leq 1$ 时 $f(x)$ 的解析式是______.

11. (第14届“希望杯”高二竞赛题)函数 $y=\sin x+\cos x+\frac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$ 的最大值等于______, 最小值等于______.

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 它的图像既关于直线 $x=1$ 对称, 又满足 $f(6-x)=f(x)$, 当 $x\in[-1,1]$ 时, $f(x)=-x^2+2x$, 记 $I_k=[4k-1,4k+3](k\in\mathbf{Z})$. 如果函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)的图像与 $f(x)(x\in I_k$ 且 $k\geq 1)$ 的图像有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为______.

13. 证明: 函数 $f(x)=\frac{\sin\beta x}{\sin\alpha x}$ ($\alpha>0$, $\beta>0$)为周期函数的充要条件是 $\frac{\beta}{\alpha}$ 为有理数.

14. (第6届“希望杯”高一竞赛题)函数 $y=f(x)$ 是偶函数, 且是一个周期为2的周期函数. 当 $x\in[2,3]$ 时, $f(x)=x-1$. 在 $y=f(x)$ 的图像上有两点 A, B, 它们的纵坐标相等(A 点在 B 点的左边), 横坐标都在区间 $[1,3]$ 上, 定点 C 的坐标为 $(0,a)$, 其中 $a>2$, 求



$\triangle ABC$面积的最大值(用a表示)。

15. 已知函数$f(x)$,$x\in\mathbf{R}$满足$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$,且$f(0)\neq0$,$f(1)=0$

(1) 求证$f(x)$是周期函数。

(2) 当$n\in\mathbf{N}(n=0,1,2,\cdots)$时,求$f(n)$的解析式。

16. 设a_n是$1^2+2^2+\cdots+n^2$的个位数字,$n=1,2,3,\cdots$,试证$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$是有理数

17. 设$f(x)=|1-2x|$,$x\in[0,1]$,记$f_1(x)=f(x)$,$f_2(x)=f(f_1(x))$,$f_3(x)=f(f_2(x))$,$\cdots$,$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$,试求方程$f_n(x)=\frac{1}{2}x$在$[0,1]$上有几个根?

18. (1999年IMO预选题)设S是所有满足下列条件的素数p组成的集合:$\frac{1}{p}$的小数部分中最小循环节中数码的个数是3的倍数,即对于每个$p\in S$,存在最小的正整数$r=r(p)$,使

$$\frac{1}{p}=0.a_1a_2\cdots a_{3r}a_1a_2\cdots a_{3r}\cdots$$

对于每个$p\in S$和任意整数$k\geqslant1$,定义$f(k,p)=a_k+a_{k+r(p)}+a_{k+2r(p)}$。

(1) 证明集合S中有无穷多个元素。

(2) 对于$k\geqslant1$及$p\in S$,求$f(k,p)$的最大值。

19. (1991年亚太地区竞赛题)课间休息时,$n(n\geqslant2)$个学生围着老师坐成一圈做游戏,老师按逆时针方向并按下列规则给学生发糖:先选择一个学生并给一块糖,隔一个学生给下一个学生一块,再隔2个学生给下一个学生一块,再隔3个学生给下一个学生一块,…如此继续下去。试确定n的值,使最后(也许绕许多圈)所有学生每人至少有一块糖。

20. 设A是$n(n\geqslant3)$元集,当$f(x)$是A到A的映射时,规定:$f^2(x)=f(f(x))$,$f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$,$n=2,3,\cdots$。求满足条件$f^{n-2}(x)$是常数而$f^{n-3}(x)$不是常数的A到A的映射f的个数。





参考答案

第1讲　函数的周期性

1　周期函数的定义

【能力训练】

1．B

2．B　$f_1(x)$，$f_2(x)$为周期函数

3．C　用特殊值法，令$x=\pi$，容易判断结果是C.

4．D　要求当$x\in(-T,0)$时$f(x)$的反函数，需要将区间转化为$(0,T)$，由最小正周期为T可得，当$x\in(-T,0)$时，

$$y=f(x)=f(x+T),$$

此时
$$x+T\in(0,T),$$

从而
$$x+T=f^{-1}(y),x=f^{-1}(y)-T,$$

x，y互换可得$y=f^{-1}(x)-T$，故选D.

5．C　由图像可知，当$x=0$时，$y=1$，所以

$$2\sin(\omega x+\varphi)=1,$$

即
$$\sin\varphi=\frac{1}{2},$$

因为
$$|\varphi|<\frac{\pi}{2},$$

所以
$$\varphi=\frac{\pi}{6}$$

由给出的四个选项可知ω之值为$\frac{10}{11}$或者为2，若$\omega=\frac{10}{11}$，则

$$T=\frac{2\pi}{10/11}=2.2\pi$$

若$\omega=2$，则



$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$$

由图像可以明显看出，$\omega=\frac{10}{11}$不符合要求，选 C

6. B　此题显然应用已知等式推导出函数的周期，才能得出正确结论

由 $f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，$f(x+1)=f(x+2)-f(x+3)$，相加得 $f(x+3)=-f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，从而得 $f(x)$是以 6 为周期的周期函数

$A=f(x+9)=f(x+3)=f(x-3)=f(x-9)=B$，选 B.

7. 2 个　设 $f(x)$，$g(x)$均为周期函数，最小正周期分别为 π，1. $f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$均不是周期函数，事实上，若 $f(x)+g(x)$为周期函数，T 为一个周期，则对任意 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x). \qquad ①$$

在①中令 $x=0$，则 $f(T)+g(T)=f(0)+g(0)=0$. 因 $f(T)\geqslant 0$，$g(T)\geqslant 0$，故 $f(T)=0$，$g(T)=0$.

由 $f(T)=0$ 得 $T=k\pi$(k 为整数)，由 $g(T)=0$，得 $T=m$(k，m 为整数)，所以 $m=k\pi$，矛盾

同理可证 $f(x)g(x)$不是周期函数

8. $f(x)=x-[x]$的图像大致如图 1－1 所示.

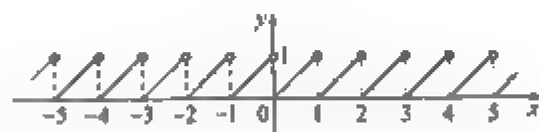


图 1－1

可用归纳法求解.

在区间$[0,1)$上，$f(x)=x$；

在区间$[1,2)$上，$f(x)=x-1$；

在区间$[2,3)$上，$f(x)=x-2$；

…

在区间$[-1,0)$上，$f(x)=x+1=x-(-1)$；

在区间$[-2,-1)$上，$f(x)=x+2=x-(-2)$；

…

所以 $f(x)=x-k$，$k\in\mathbf{Z}$，$x\in[k,k+1)$.

9. (归纳法)

在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上，$f(x)=\sin x$；

在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$上，$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$；

在区间$\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$上，$f(x)=\sin\left(x-\frac{2}{2}\pi\right)$；

在区间$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$上，$f(x)=\sin\left[x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$；

在区间$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$上，$f(x)=\sin\left[x-\left(-\frac{2}{2}\pi\right)\right]$；

…

所以在区间$\left[\frac{k\pi}{2},\frac{k+1}{2}\pi\right)$上，$f(x)=\sin\left(x-\frac{k\pi}{2}\right)$，$(k\in\mathbf{Z})$



10. $f\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<-f\left(\frac{10}{3}\right)<f\left(\frac{9}{2}\right)$ 提示：在 $f(1+x)+f(1-x)=f(1)$ 中，令 $x=0$，得 $f(1)=0$. 故 $f(1+x)+f(1-x)=0$，$f(1+x)=-f(1-x)=f(x-1)$，

所以 $f(x+2)=f(x)$

由此可知，$f(x)$ 是以 2 为周期的奇函数

所以 $-f\left(\frac{10}{3}\right)=f\left(-\frac{10}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)$，$f\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，且 $0<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，

所以 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，所以 $f\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<-f\left(\frac{10}{3}\right)<f\left(\frac{9}{2}\right)$

11. 因为点 $(0,1)$ 在曲线上，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $2\sin\varphi=1$，从而有 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$

将点 $\left(\frac{11}{12}\pi,0\right)$ 的坐标代入表达式 $y=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 中，得 $\sin\left(\frac{11}{12}\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$

所以 $\frac{11}{12}\pi\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\omega=\frac{12}{11}k-\frac{2}{11}$. 由图像可知，点 $(0,1)$ 与 $\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$ 是曲线上同一个周期内的两点，且在 $\frac{3}{4}$ 个周期之外，由此可得周期 $T>\frac{11\pi}{12}$ 且 $\frac{3T}{4}<\frac{11\pi}{12}$，所以 $\frac{11\pi}{12}<T<\frac{11\pi}{9}$.

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\frac{18}{11}<\omega<\frac{24}{11}$ (*)

将 $\omega=\frac{12k}{11}-\frac{2}{11}$ 代入(*)式得

$$20<12k<26.$$

因为 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=2$，由此得 $\omega=2$，故所求函数的表达式为 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

12. 由点 A，B，C 在曲线上，可得

$$A\sin\varphi=2, \quad ①$$

$$A\sin\left(\frac{5}{2}\omega+\varphi\right)=0, \quad ②$$

$$A\sin(3\omega+\varphi)=-2. \quad ③$$

由②得
$$\frac{5}{2}\omega+\varphi=k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z}).$$

因为点 $A(0,2)$ 与 $B(3,-2)$ 在同一个周期内，所以最小正周期 $T>3$，即 $T=\frac{2\pi}{\omega}>3$，由此可得

$$0<\omega<\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 0<\frac{5}{2}\omega<\frac{5\pi}{3}$$

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $0<\frac{5}{2}\omega+\varphi=k_1\pi<\frac{8\pi}{3}$.



由此可知 $k_1=1$ 或 $k_1=2$.

由①+③得

$$\sin(3\omega+\varphi)+\sin\varphi=0. \quad ④$$

Ⅰ．当 $k_1=1$ 时，$\varphi=\pi-\frac{5\omega}{2}$，代入④得 $\sin\frac{5}{2}\omega-\sin\frac{\omega}{2}=0$，即

$$2\cos\frac{3\omega}{2}\sin\omega=0$$

从而可得

$$\omega=k_2\pi \text{ 或 } \frac{3\omega}{2}=k_2\pi+\frac{\pi}{2}(k_2\in Z).$$

因为 $0<\omega<\frac{2}{3}\pi$，所以 $\omega=k_2\pi$ 不可能.

由 $\frac{3\omega}{2}=k_2\pi+\frac{\pi}{2}$，得

$$\omega=\frac{2}{3}k_2\pi+\frac{\pi}{3}. \quad ⑤$$

因为 $0<\omega<\frac{2}{3}\pi$，从而由⑤式可得 $k_2=0$，$\omega=\frac{\pi}{3}$，$\varphi=\pi-\frac{5}{2}\omega=\frac{\pi}{6}$，将 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 代入①式得

$$A\sin\frac{\pi}{6}=2,$$

故 $A=4$

综上所述得，所求表达式为

$$y=4\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Ⅱ．当 $k_1=2$ 时，$\varphi=2\pi-\frac{5}{2}\omega$，代入④式，整理可得

$$\sin\frac{\omega}{2}-\sin\frac{5}{2}\omega=0.$$

同Ⅰ类似的分析，可得 $\omega=\frac{\pi}{3}$，代入 $\varphi=2\pi-\frac{5}{2}\omega$，得 $\varphi=\frac{7\pi}{6}>\pi$，与 $0<\varphi<\pi$ 矛盾.

因此，符合条件的函数表达式只有 $y=4\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

13．由 $g(x)=f(x)+1-x$ 得 $f(x)=g(x)+x-1$.

则 $g(x+5)+(x+5)-1\geqslant g(x)+(x-1)+5$，$g(x+1)+(x+1)-1\leqslant g(x)+(x-1)+1$

于是，$g(x+5)\geqslant g(x)$，$g(x+1)\leqslant g(x)$

故 $g(x)\leqslant g(x+5)\leqslant g(x+4)\leqslant g(x+3)\leqslant g(x+2)\leqslant g(x+1)\leqslant g(x)$

所以 $g(x+1)=g(x)$，故 $g(x)$ 是以 1 为周期的周期函数．又 $g(1)=1$，故 $g(2002)=1$

评析　此题表面上看是求函数值，实际上关键是由题目所给条件推得 $g(x)$ 是周期为 1 的周期函数



即可获解

14. 这是一个 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 型的函数，处理本题的关键是周期，即在给定的区间内究竟有几个周期，区间长度是多少，这些都是需要我们加以解决的. 很明显有 $T=\frac{2}{2m+1}$，区间长度为 $(a+3)-a=3$. 由于 $\frac{5}{4}$ 不是 y 的最大值，从而每一周期内出现 $\frac{5}{4}$ 值有 2 次，出现 4 次应有 2 个周期，出现 8 次应有 4 个周期，于是 $\begin{cases}4T>3,\\2T\leqslant 3,\end{cases}$ 即 $\frac{3}{4}<T\leqslant\frac{3}{2}$.

所以 $\frac{3}{4}<\frac{6}{2m+1}\leqslant\frac{3}{2}$，即 $\frac{3}{2}\leqslant m<\frac{7}{2}$，

又 $m\in\mathbf{N}$，所以 $m=2$ 或 3.

15. (1) 假设 $f(x)$ 是周期函数，T 是它的一个周期，则对任意的 $x\neq 0$，都有

$$\sin\frac{1}{x+T}=\sin\frac{1}{x}$$

由于周期 T 是非零实数，上式中取 $x=-T$，左边无意义，而右边 $=-\sin\frac{1}{T}$，矛盾.

说明假设不真，$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 为非周期函数.

注 可以证明：仅在有限个点无定义的函数，均为非周期函数. 如：$f(x)=\sin\frac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbf{N},n>1)$，$f(x)=\frac{\sin x+x^2+1}{x}$，$f(x)=x\sin\frac{1}{x(1+x^2)}$ 等等.

(2) 设 $f(x)$ 是周期函数，则必存在 $T\neq 0$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)=f(x)$，即 $\sin(x+T)^2=\sin x^2\Rightarrow\sin(x+T)^2-\sin x^2=0$，和差化积，

$$2\sin\left(Tx+\frac{T^2}{2}\right)\cos\left[(x^2+Tx)+\frac{T^2}{2}\right]=0,$$

得
$$\sin\left(Tx+\frac{T^2}{2}\right)=0,\qquad ①$$

或
$$\cos\left[(x^2+Tx)+\frac{T^2}{2}\right]=0.\qquad ②$$

由①得 $\sin(Tx)\cos\frac{T^2}{2}+\cos(Tx)\sin\frac{T^2}{2}=0\Rightarrow\tan(xT)=-\tan\frac{T^2}{2}$，$-\tan\frac{T^2}{2}$ 为定值，欲对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$\tan(Tx)=-\tan\frac{T^2}{2}$ 成立 $\Rightarrow T$ 不存在.

同理对②可得 $\cot(x^2+Tx)=\tan\frac{T^2}{2}$，$T$ 亦不存在，矛盾.

故 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

(3) 函数的定义域是 $[0,+\infty)$，它是单侧无界区间，假设 $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}$ 有周期 T，则 T 必为正值，且依定义有 $f(x+T)=f(x)$，即 $\sin\sqrt[3]{x+T}=\sin\sqrt[3]{x}$ 对一切 $x\geqslant 0$ 成立.



令 $x=0$，有 $\sin\sqrt{T}=0$。

所以 $$\sqrt{T}=k\pi(k\in\mathbf{N})\qquad ①$$

又令 $x=T$，有 $$\sin\sqrt{2T}=\sin\sqrt{T}=0$$

所以 $$\sqrt{2T}=k\pi(k\in\mathbf{N})\qquad ②$$

由②÷①，得

$$\frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{T}}=\frac{k\pi}{k\pi}=\frac{k}{k},$$

即 $$\frac{k}{k}=\sqrt{2}.$$

与 $k,k\in\mathbf{N}$ 矛盾（因为$\sqrt{2}$是无理数）。

所以假设不成立，故函数 $y=\sin\sqrt{x}$ 不是周期函数

2 抽象函数的周期性

【能力训练】

1. B 由 $f(x+2)=-f(x)$ 可推知函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，故有 $f(6)=f(2)=f(-2)=-f(2)=0$，选 B.

2. C 因为偶函数关于 y 轴对称，而函数图像 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对称，则 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+x\right)$，即 $f(x+\sqrt{2})=f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+x\right)\right]=f(-x)=f(x)$，故该函数是以$\sqrt{2}$ 为周期的周期函数. 应选 C.

3. B 对于任意实数 x，依题设有 $f(x)=-f(x)$，$f(x+2)=-f(x)$，

所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

又 $f(x)=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，

所以当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x$，

当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$-1\leqslant x-2\leqslant 1$，得 $f(x)=-f(x-2)=-(x-2)$。

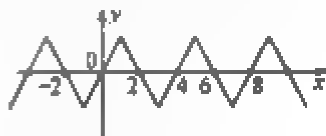


图 1-2

综合得 $f(x)$ 是以 $T=4$ 为一个周期的函数，其图像如图 1-2 所示，故 $f(7.5)=f(3.5)=f(-0.5)=-0.5$.

4. C 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\leqslant\varphi<\pi)$ 为偶函数，所以 $2\sin(\omega x+\varphi)=2\sin(-\omega x+\varphi)$，

展开即 $\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi=-\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi$，

$\sin\omega x\cos\varphi=0$，$\sin\omega x\neq 0$，所以 $\cos\varphi=0$，又 $0\leqslant\varphi<\pi$，故 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

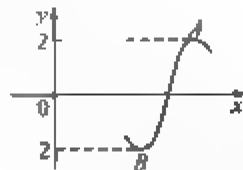


图 1-3

这样题给函数为 $y=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\omega x$



A 到 x 轴距离 $AD=2$，$AC=2\sqrt{2}$，所以 $CD=2$。故所给函数一个周期为 8。容易求出函数解析式为 $y=-2\cos\frac{\pi}{4}x$，该函数的一条对称轴方程为 $x=4$。故选 C。

5. B　由 $f(x+999)=-\frac{1}{f(x)}$ 得 $f(x+1998)=-\frac{1}{f(x+999)}$，即 $f(1998+x)=f(x)$，可知 $y=f(x)$ 是一个周期为 1998 的周期函数。

因为 $f(x)=f(1998+x)=f[999+(999+x)]$
$=f[999-(999+x)]=f(-x)$，

即 $f(-x)=f(x)$，所以 $y=f(x)$ 是偶函数，故选 B。

6. 由 $f(20-x)=-f(20+x)$ 得 $f(20-x)+f(20+x)=0\cdots$①，所以函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(20,0)$ 对称；又由 $f(10+x)=f(10-x)$ 知，函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=10$ 对称，知函数 $f(x)$ 是周期函数，且它的一个周期是 $T=4(m-a)=40$。又由①得 $f(40-x)+f(x)=0$，即 $f(-x)+f(x)=0$，所以函数 $f(x)$ 又是奇函数，故选 C。

7. 0.3　由条件知，$f(1+x)=f(1-x)=f(x-1)$，所以 $y=f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，可作如图 1-4 的图像。

于是 $f(8.6)=f(-0.6)=-\frac{1}{2}(-0.6)=0.3$

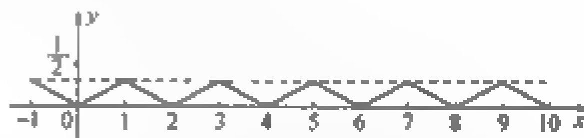


图 1-4

8. 此题必须利用已知条件推出函数的一个周期，方能优化求解。

对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+2)=f[2-(-x)]=f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数。

由 $f(x)$ 是偶函数，$x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2$，所以 $x\in[-1,1]$ 时有 $f(x)=x^2$，当 $2k-1\leqslant x\leqslant 2k+1$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时有 $-1\leqslant x-2k\leqslant 1$，又 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，所以 $f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$。

所以当 $2k-1\leqslant x\leqslant 2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时 $f(x)=(x-2k)^2$。

9. 由图像的移动及翻折，不难得到

$$f(x)=\begin{cases}x+4, & x\in[-2,-1],\\ -x+2, & x\in(-1,0].\end{cases}$$

于是 $f(x)=\begin{cases}3+(x+1), & x+1\in[-1,0],\\ 3-(x+1), & x+1\in(0,1].\end{cases}$

所以 $f(x)=3-|x+1|$，$x\in[-2,0]$。

10. 依题意，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数。

因为当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $f(x)=\frac{1}{2}x$，且 $f(x)$ 为奇函数，所以当 $-1\leqslant x<0$ 时 $f(x)=\frac{1}{2}x$



此时有 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 可得 $f(-1)=f(3)=-\frac{1}{2}$. 又因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数,所以也有 $f(4k-1)=-\frac{1}{2}$,$(k\in \mathbf{Z})$.所以答案为 $\{x\mid x=4k-1,(k\in \mathbf{Z})\}$

11. $f(x)=a\sin ax+\cos ax=\sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin ax+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos ax\right)$

$$=\sqrt{a^2+1}\sin(ax+\varphi).\left(其中\ \varphi=\arctan\frac{1}{a},\ a>0\right)$$

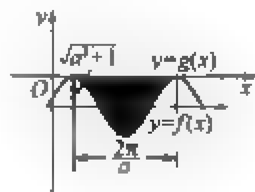


图1-5

由此可知函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{a}$,振幅为 $\sqrt{a^2+1}$.

由 $f(x)$ 的图像与 $g(x)$ 的图像围成的封闭图形的对称性(即图1-5中的阴影部分),可将这图形割补成长为 $\frac{2\pi}{a}$、宽为 $\sqrt{a^2+1}$ 的长方形.

故它的面积是 $\frac{2\pi}{a}\sqrt{a^2+1}$.

12. 由函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{3}{4},0\right)$ 成中心对称可知,$f(x)=-f\left(-x-\frac{3}{2}\right)$.

又 $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$,则 $f\left(-x-\frac{3}{2}\right)=f\left(x+\frac{3}{2}\right)$.

则必有 $f(-x)=f(x)$.

故 $f(x+3)=f\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$.

所以,$f(x)$ 是以 3 为周期的偶函数.

从而,$f(1)=f(-1)=1$,$f(2)=f(-1+3)=f(-1)=1$,$f(3)=f(0)=-2$.

故 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2008)=669[f(1)+f(2)+f(3)]+f(2008)=f(2008)=f(1)=1$.

13. 由于 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$.

又其图像关于 $x=1$ 对称,故 $f(1+x)=f(1-x)$,于是 $f(x+2)=f[1+(1+x)]=f[1-(1+x)]=f(-x)=f(x)$,

故 $f(x)$ 是以 2 为一个周期的周期函数,得 $f(0)=f(2)=\sqrt{2}$,$f(1)=f(3)=\sqrt{3}$,并可绘出 $x\in[0,1]$ 上的草图,又 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称,故可绘出 $x\in[-1,0]$ 上的草图,从而可绘出 $y=f(x)$ 在一个周期 $[-1,1]$ 内的草图,再据周期性,可知 $y=f(x)$ 草图如图1-6所示.



图1-6



14. 因为函数 $f(x)$ 的图像关于两点 (a, b) 和 (m, n) 对称，所以可得 $f(x)+f(2a-x)=2b$，$f(x)+f(2m-x)=2n$，两式相减得 $f(2m-x)-f(2a-x)=2n-2b$，令 $t=2m-x$，则 $x=2m-t$，代入上式得 $f(t)-f(2a-2m+t)=2n-2b$，即 $f[x+2(a-m)]=f(x)+2(b-n)$…①.

对 $y_k=f[x+2k(a-m)]$，则由①得 $y_k=f[x+2(k-1)(a-m)+2(a-m)]=f[x+2(k-1)(a-m)]+2(b-n)=y_{k-1}+2(b-n)$，所以 $y_k-y_{k-1}=2(b-n)$ 为常数，可见函数值 $y_k=f[x+2k(a-m)](k\in \mathbf{Z})$ 构成的数列 $\{y_k\}$ 是等差数列，且公差是 $2(b-n)$.

这个结论在函数与数列之间架起了一座桥梁！

15. (1) 因为 $f(1+x)=f[2+(x-1)]=-f(x-1)=f(1-x)$，即 $f(1+x)=f(1-x)$，所以 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称.

(2) 因为 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^2$，

当 $x\in[1,3]$ 时，$2-x\in[-1,1]$，则 $f(x)=f[1+(x-1)]=f[1-(x-1)]=f(2-x)=-(x-2)^2$.

当 $x\in[3,5]$ 时，$x-2\in[1,3]$，则 $f(x)=-f(x-2)=(x-4)^2$.

所以 $f(x)=\begin{cases}-(x-2)^2, & x\in[1,3],\\ (x-4)^2, & x\in[3,5].\end{cases}$

(3) 因 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故 $y=f(x)$ 是以 4 为周期的函数.

所以 $\{y \mid y=f(x), x\in \mathbf{R}\}=\{y \mid y=f(x), 1\leqslant x\leqslant 5\}$.

因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上是减函数，所以在 $[1,3]$ 上，$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，又 $f(x)$ 在 $[3,5]$ 上是增函数，所以在 $[3,5]$ 上，$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，即 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，要使 $A\neq\varnothing$，需 $a<1$.

3 函数方程解的周期性

【能力训练】

1. C 由 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$ 可知函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，所以 $f(5)=f(1)=-5$，且 $f(-1+2)=\frac{1}{f(-1)}$，故 $f[f(5)]=f(-5)=f(-1)=\frac{1}{f(1)}=-\frac{1}{5}$. 选 C.

2. D $f(x+2)=f[(x+1)+1]$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+1)-[f(x+1)]^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}\right]^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2}=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-f(x)\right|$$

又 $f(x)=f[(x-1)+1]$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-1)-[f(x-1)]^2}\geqslant\frac{1}{2},$$

所以 $f(x+2)=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x)$，即 2 是 $f(x)$ 的一个周期. 从而



$f(2007)=f(2\times1004-1)=f(-1)=\frac{1}{2}$.故选 D.

3. D　将 $x-2$ 代替式中的 x,则有 $f(x)+f(x-4)=f(x-2)$,于是 $f(x+2)=-f(x-4)$,可得 $f(x+6)=-f(x)$,所以 $f(x+12)=f(x)$,故选 D.

注　原题说,12 是 $f(x)$的最小正周期,这是不对的.如当 $f(x)=0$ 时,12 只是它的一个周期.

4. B　因为 $f(x)$为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$.

两边求导,得 $-f'(-x)=f'(x)$,令 $x=0$,得 $-f'(0)=f'(0)$,所以 $f'(0)=0$.

又 $f(x)$在 R 上以 5 为周期,即 $f(x+5)=f(x)$,$x\in$ R.求导,得 $f'(x+5)=f'(x)$,即 $f'(x)$也以 5 为周期.故 $f'(5)=f'(0)=0$.选 B.

5. D　由于 $f(x)$在 R 上为奇函数,所以对 $x\in$ R,$f(-x)=-f(x)$,令 $x=0$,得 $f(0)=-f(0)$,故 $f(0)=0$.又 $f(x)$以 T 为周期,所以 $f(-T)=f(T)=f(0)=0$.

$f(x)$在$[0,T]$内至少还有一个根,否则 $f(x)$在$[0,T]$上恒正(或恒负).由奇函数知 $f(x)$在$[-T,0]$上恒负(或恒正),与 $f(x)$以 T 为周期矛盾.选 D.

6. D　已知 $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$　①

在①中令 $x=y=0$,得 $2f(0)=2[f(0)]^2$,因为 $f(0)>0$,所以 $f(0)=1$.　②

注意 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$,并用 $\frac{\pi}{2}+x$ 和 x 分别替换①中的 x 和 y 得

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+f(x)=2f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

所以,$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f(x)$,　③

再据③有 $f(\pi+x)=f\left[\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)\right]=-f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f(x)$,所以 $f(x)$是以 π 为周期的周期函数.选 D.

7. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　$f(x)$为周期函数$\Leftrightarrow$必存在 $T\neq0$,使对任意的 $x\in$ R,有 $f(x+T)=f(x)$.另一方面已知,有 $f(x+T)=f\left(xT-\frac{x}{T}\right)=f\left[x\left(T-\frac{1}{T}\right)\right]$,则 $f\left[x\left(T-\frac{1}{T}\right)\right]=f(x)$,只要 $T-\frac{1}{T}=1\Rightarrow T^2-T-1=0$,解得 $T=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.按要求 $T>0$,所以 $T=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,即 $f(x)$的一个正周期为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8. 9997　从自变量值 2009 和 1 进化比较及根据已知条件来看,易联想到函数 $f(x)$是周期函数.

由条件知 $f(x)\neq1$,故 $f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

所以 $f(x+4)=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$,

即 $f(x+4)=-\frac{1}{f(x)}$,$f(x+8)=-\frac{1}{f(x+4)}$,可知 $f(x+8)=f(x)$,函数 $y=f(x)$是周期为 8



的函数，从而 $f(2009)=f(1+8\times251)=f(1)=9997$.

9. 14 $f(x)=f[1+(x-1)]=f[1-(x-1)]=f(2-x)=f[8+(-6-x)]=f[8-(-6-x)]=f(14+x)$.

根据周期的定义知 $T\leqslant14$，图1-7是符合条件、周期为14的函数图像.

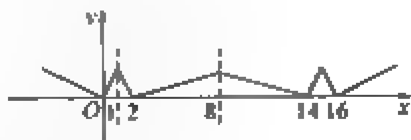


图1-7

故 T 的最大值为 14.

说明 此题采用举例验证的方法说明周期 T 的最大值为 14，这种例证法在竞赛中也经常出现，有利于培养思维的独创性.

10. 1. 以 $x-2007$ 代换所给关系式中之 x，得 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$ ①

再以 $x+1$ 替换 x，得 $f(x+1)=f(x)+f(x+2)$ ②

由①、②相加得 $f(x-1)+f(x+2)=0$.

以 $x+1$ 替换 x，得 $f(x)+f(x+3)=0$，所以 $f(x+3)=-f(x)$，$f(x+6)=f[(x+3)+3]=-f(x+3)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，6 是它的一个周期. 所以 $f(2007)=f(6\times334+3)=f(3)$.

又 $f(2)=f(1)+f(3)$，$f(3)=f(2)-f(1)=\lg15-\lg\frac{3}{2}=1$. 从而 $f(2007)=f(3)=1$.

说明 本题结论可推广为：已知函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(x-a)+f(x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数.

证明 因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=f(x-a)+f(x+a), \quad ①$$

故

$$f(x-a)=f(x-2a)+f(x). \quad ②$$

①+②得

$$f(a+x)=-f(x-2a), f(x)=-f(x-3a).$$

得

$$f(x+6a)=-f(x+6a-3a)=-f(x+3a)=f(x+3a-3a)=f(x).$$

故函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是周期函数，6a 是它的一个周期.

11. 0. 由 $f(1+x)=f(3-x)$ 得 $f(4-x)=f(x)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，得一个周期 $T=4$.

由 $f(x+2)+f(x)=0$ 得 $f(1)+f(3)=0$，$f(2)+f(4)=0$，…，故 $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=0$.

12. 是周期函数. 由于 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，故令 $y=\frac{\pi}{2}$，则原方程转化为 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$ ①

在①中用 $x+\pi$ 换 x 得

$$f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0. \quad ②$$

②-①得

$$f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$



即
$$f(x+2\pi)=f(x)$$
所以 $f(x)$ 是周期函数,它的一个周期为 2π.

13. 证明 $f[x+(a_2+b_2)-(a_1+b_1)]=f[a_2+(x+b_2-a_1-b_1)]$

$$=f[b_2-(x+b_2-a_1-b_1)]$$
$$=f[a_1+(-x+b_1)]$$
$$=-f[b_1-(-x+b_1)]=-f(x).$$

$f[x+2(a_2+b_2)-2(a_1+b_1)]=-f[x+(a_2+b_2)-(a_1+b_1)]=-[-f(x)]=f(x)$.

同理,$f[x+2(a_1+b_1)-2(a_2+b_2)]=f(x)$.

所以 $f(x)$ 是周期函数,$2|(a_2+b_2)-(a_1+b_1)|$ 为其一正周期.

14. 由 $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 联想到 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$,找到一个具体函数 $f(x)=\tan x$ 及 $a=\frac{\pi}{4}$,而函数 $y=\tan x$ 的最小正周期 $T=\pi=4a$,因此,可猜想 $f(x)$ 是一个周期为 $4a$ 的函数.

由 $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$,可得 $f(x+2a)=f[(x+a)+a]=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=-\frac{1}{f(x)}$.

从而 $f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$,所以 $f(x)$ 是周期函数,$4a$ 是它的一个周期.

说明 高度的抽象是数学的一个基本特点.本题给出的数学问题较抽象,不易发现其内在的联系和规律,这就我们结合具体数学情境,联系已学知识,建立模型,便可以化抽象为具体启迪解题思路,找到解决问题的突破口.

15. 因为对任何 $x\in\mathbf{R}$,有
$$f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{7}{42}\right)+f\left(x+\frac{6}{42}\right),$$
故
$$f\left(x+\frac{7}{42}\right)-f(x)=f\left(x+\frac{13}{42}\right)-f\left(x+\frac{6}{42}\right)=f\left(x+\frac{19}{42}\right)-f\left(x+\frac{12}{42}\right)$$
$$=\cdots=f\left(x+\frac{49}{42}\right)-f\left(x+\frac{42}{42}\right),$$
即
$$f\left(x+\frac{42}{42}\right)-f(x)=f\left(x+\frac{49}{42}\right)-f\left(x+\frac{7}{42}\right). \quad ①$$
同样,有
$$f\left(x+\frac{7}{42}\right)-f\left(x+\frac{1}{42}\right)=f\left(x+\frac{14}{42}\right)-f\left(x+\frac{8}{42}\right)=f\left(x+\frac{21}{42}\right)-f\left(x+\frac{15}{42}\right)$$
$$=\cdots=f\left(x+\frac{49}{42}\right)-f\left(x+\frac{43}{42}\right),$$
即



$$f\left(x+\frac{49}{42}\right)-f\left(x+\frac{7}{42}\right)=f\left(x+\frac{43}{42}\right)-f(x). \qquad ②$$

由①、②，得

$$f\left(x+\frac{42}{42}\right)-f(x)=f\left(x+\frac{43}{42}\right)-f\left(x+\frac{1}{42}\right)=f\left(x+\frac{44}{42}\right)-f\left(x+\frac{2}{42}\right)$$

$$=\cdots=f\left(x+\frac{84}{42}\right)-f\left(x+\frac{42}{42}\right),$$

即 $$f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1).$$

因此，$f(x+n)=f(x)+n[f(x+1)-f(x)]$ 对所有 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

又因对所有 $x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|\leqslant 1$，即 $f(x)$ 有界，故只有 $f(x+1)-f(x)\equiv 0$.

因此对所有 $x\in\mathbf{R}$，$f(x+1)=f(x)$，即 $f(x)$ 为周期函数.

第 2 讲　周期函数的最小正周期

1　求函数最小正周期的基本方法

【能力训练】

1. B　$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，则最小正周期 $T=\pi$，故选 B.

2. B　原式可化为 $y=\tan x$，不要误认为最小正周期为 π，因 $x=0$ 时，函数有意义，但当 $x=\pi$ 时，函数无意义，故为 B.

3. D　$f(x+T)=f(x)$ 即 $\sin^4(x+T)+\cos^4(x+T)=\sin^4 x+\cos^4 x$ 中，取 $x=0$，得 $\sin^4 T+\cos^4 T=1$，经检验，$T=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 或 π 时，上式均不成立，故排除 A、B、C，选 D.

4. B　因为 $-1\leqslant\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，

所以 $\left|\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-1\right|=1-\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 且 $T=\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=4$. 选 B.

又解：从图像上看，曲线 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 都在 x 轴下方且与 x 轴相切，所以曲线 $y=\left|\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-1\right|$ 都在 x 轴上方且与 x 轴相切，所以函数 y 的最小正周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 因为题设 $T=\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=4$，选 B.

说明　一般地 $y=|A\sin(\omega x+\varphi)+c|$ $(\omega>0)$ 型函数，当 $c=0$ 时，最小正周期为 $\frac{\pi}{\omega}$，当 $c\neq 0$ 时，最小正周期均为 $\frac{2\pi}{\omega}$. 有兴趣的读者可自行证明.

5. A　画出函数的简图 2-1.



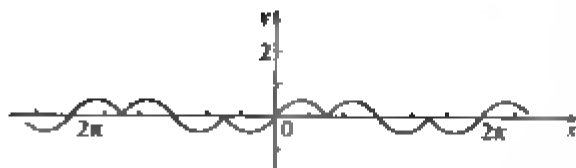


图2 1

可见函数的最小正周期为 2π，选 A.

6. C　易知 $T_1=\dfrac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\pi$，$T_2=\pi$，下面求 T_3.

因为　$\sin\dfrac{x}{3}\left(\sin\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{x}{3}\right)=\sin^2\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2x}{3}$

$$=\frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}\right).$$

所以　$T_3=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，$T_2<T_1<T_3$，选 C.

7. $\dfrac{2}{5}\pi$. 由图可知，在 $[0,2\pi]$ 内有 5 个周期，因此，$f(x)$ 的最小正周期是 $\dfrac{2\pi}{5}$.

8. π. 题给函数化为 $y=\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\dfrac{5}{6}\pi\right)-\cos\dfrac{\pi}{6}\right]$，所以其最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

9. 2π. 化简得 $f(x)=\dfrac{\cot x(1+\sin x)}{1+\sin x}=\cot x$，所以 $f(x)$ 最小正周期为 π. 这样的解法其实是错误的. 错误的原因在于忽视了函数的定义域. 事实上由 $\cot x$ 有意义，知 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$，由 $1+\sin x\neq 0$，知 $x\neq 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. 当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 时，$x+\pi=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. 故 $f(x+\pi)$ 无意义，所以 $f(x)$ 的最小正周期不是 π，而是 2π.

10. $f(x)=\dfrac{\sin^4x+\cos^4x+\sin^2x\cos^2x}{2-\sin2x}=\dfrac{(\sin^2x+\cos^2x)^2-\sin^2x\cos^2x}{2(1-\sin x\cos x)}$

$$=\frac{1}{2}(1+\sin x\cos x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin2x.$$

函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

11. 2π　$\dfrac{1}{2}$　提示　分象限讨论画出函数简图，可得最小正周期为 2π，最大值为 $\dfrac{1}{2}$.

12. $f(x+T)=f(x)$ 即 $\cos^3(x+T)-\sin^2(x+T)=\cos^3x-\sin^2x$ 中令 $x=0$，得 $\cos^3T-\sin^2T=1$，$\therefore\cos^3T=1+\sin^2T\geqslant1$，$\cos^3T=1$，$\cos T=1$，$T=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 所以函数 $f(x)$ 正周期的可能值为：$2\pi,4\pi,6\pi,\cdots$. 经检验 2π 是 $f(x)$ 的正周期，也是它的最小正周期.

13. (Ⅰ) $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+a$

$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+a.$$



所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)可得 $f(x)$ 的最大值为 $2+a$.

所以 $2+a=1$，即 $a=-1$.

(Ⅲ) 因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]$.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $2+a$.

于是 $2+a=1$，即 $a=-1$.

14. (1) 由条件得 $M=1$，$m=-1$，$T=\frac{5\times 2\pi}{|k|}=\frac{10\pi}{|k|}$.

(2) $f(x)$ 在它的每一个周期中都恰好有一个值是 M 与另一个值是 m，而任意两个整数间的距离都不小于1，因此，要使函数 $f(x)$ 在任意两个整数间至少有一个值是 M 与另一个值是 m，必须使 $f(x)$ 的周期不大于1，即 $\frac{10\pi}{|k|}\leqslant 1$，$|k|\geqslant 31.4$，所以32是所求最小正整数 k.

15. 设 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=kx+b$，依题意，$f(0)=0$，故 $b=0$.

在 $[-1,0)$ 上，$f(x)=-f(-x)=-k(-x)=kx$.

所以 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=kx$.

设 $x\in[1,4]$ 时，$f(x)=a(x-2)^2-5$，则 $f(1)=k=a-5$. ①

又 $f(4)=4a-5$，且 $f(4)=f(-1)=-k$.

所以 $4a-5=-k$. ②

解①、②得 $a=2$，$k=-3$.

$$f(x)=\begin{cases}2(x-2)^2-5, & (1\leqslant x\leqslant 4),\\ -3x, & (-1\leqslant x<1).\end{cases}$$ 由周期性，可得

$$f(x)=\begin{cases}-3(x-5t), & 5t-1\leqslant x<5t+1,\\ 2(x-5t-2)^2-5, & 5t+1\leqslant x\leqslant 5t+4.\end{cases}(t\in\mathbf{Z})$$

2 求函数最小正周期的特殊方法

【能力训练】

1. A 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$y=|\sin x|=\sin x$，单调递增，又 $y=|\sin x|$ 最小正周期为 π，故选 A.

2. C 对任意实数 x，都有 $f_1(x+T)=f_1(x)$，$f_2(x+T)=f_2(x)$，因此 $f_1(x+T)+f_2(x+T)=f_1(x)+f_2(x)$，所以 $y=f_1(x)+f_2(x)$ 是周期函数.

取 $f_1(x)=\sin x$，$f_2(x)=-\sin x$，则 $y=f_1(x)+f_2(x)=0$ 是周期函数，但没有最小正周期(任意非零常数都是它的周期)，选 C.

评析 两个函数和的周期性问题，结果是非常复杂的，许多问题至今还没有解决. 一般都从周期函数的定义出发，结合举反例进行论述.

下面列举两个函数和的周期性问题的一些结论：



(1) 两个周期函数之和,可能是周期函数,也可能是非周期函数.设 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin\pi x$, $h(x)=1$,则两个周期函数之和 $f(x)+h(x)=\sin x+1$ 是周期函数,而 $f(x)+g(x)=\sin x+\sin\pi x$ 是非周期函数.

(2) 一个周期函数与一个非周期函数的和,可能是周期函数,也可能是非周期函数.

设 $f(x)=\sin x+\sin\pi x$, $g(x)=-\sin x$, $h(x)=-2\sin x$,则 $f(x)+g(x)=\sin\pi x$ 是周期函数,$f(x)+h(x)=\sin\pi x-\sin x$ 是非周期函数.

(3) 若函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是周期函数,最小正周期分别是 T_1, T_2($T_1\neq T_2$),当 T_1, T_2 是有理数时,函数 $y=f_1(x)+f_2(x)$ 是周期函数,T_1, T_2 的最小公倍数是它的一个周期.

3. C $f(x)=|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$,因 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 2π,而 $f(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 的图像是将 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 图像中 x 轴下方的图像翻折到 x 轴上方,所以其最小正周期为 π,故选 C.

4. C $f_1(x)=\left|\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{2}|\sin x|$,最小正周期 $T_1=\pi$;$f_2(x)=\sin\frac{2x}{3}+\cos\frac{2x}{3}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$,最小正周期 $T_2=3\pi$;$f_3(x)=\arccos(\sin x)$ 的最小正周期 $T_3=2\pi$.由此可知 $T_1<T_3<T_2$,故选 C.

5. B

6. D 因为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 T,且 $T\in\left(\frac{1}{100},\frac{1}{50}\right)$,

又因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,

所以 $\frac{\omega}{2\pi}\in(50,100)$,

所以 $\omega\in(100\pi,200\pi)$,

所以 $315\leqslant\omega\leqslant 628$ 且 $\omega\in\mathbf{N}^*$,

所以 ω 可取值的集合中元素的数目为 $628-315+1=314$.故选 D.

7. 2π $f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\cos(x+T)=\cos x\Leftrightarrow\cos(x+T)=\cos x$,所以题给函数与 $y=\cos x$ 的最小正周期相同,均为 2π.

8. π 易知 π 是 $f(x)$ 的周期.再用反证法证明 π 是它的最小正周期.

设 $T(0<T<\pi)$ 是 $f(x)$ 的一个周期,则

$$|\sin(x+T)|+|\cos(x+T)|=|\sin x|+|\cos x| \qquad ①$$

对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,取 $x=0$,得

$$|\sin T|+|\cos T|=|\sin 0|+|\cos 0|=1$$

但 $0<T<\pi$ 时,$0<|\sin T|\leqslant 1$, $0<|\cos T|<1$,故 $1<|\sin T|+|\cos T|\leqslant\sqrt{2}$,矛盾.说明满足①且小于 π 的正数 T 不存在.

9. 2π 根据奇偶函数法,易证偶函数 $y=\sin^{2n}x$、奇函数 $y=\cos^{2n-1}x$ 的最小正周期分别为 π, 2π,它



们的最小正周期为 2π

10. 2π. 因为 $\sin x$ 的最小正周期 $T_1=2\pi$，$\cos 2x$ 的最小正周期 $T_2=\pi$，$\sin 4x$ 的最小正周期 $T_3=\frac{\pi}{2}$，且 2π、π、$\frac{\pi}{2}$ 的最小公倍数是 2π. 所以函数 $y=\sin x-2\cos 2x+4\sin 4x$ 的最小正周期是 2π

11. 2π. 提示：用等周期法. 所给函数与 $y=\sin x(\sin x\neq 0)$ 周期相同，均为 2π

12. 2π. 由 $|\sin(x+T)|+|\sin 2(x+T)|+|\sin 3(x+T)|=|\sin x|+|\sin 2x|+|\sin 3x|$，

令 $x=0$，得 $|\sin T|+|\sin 2T|+|\sin 3T|=0$，即 $\sin T=\sin 2T=\sin 3T=0$，解得 $T=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 易知 2π 是所给函数周期，也是最小正周期.

13. $\frac{\pi}{2}$. 因为 $|\sin 2x|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\left|\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\sin 2x|$，且对任意实数 T，当 $0<T<\frac{\pi}{2}$ 时，都有 $|\sin 2(x+T)|\neq|\sin 2x|$. 令 $f(x)=3^x+2^x+3x$，则 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数. 从而 $f\left[\left|\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|\right]=f(|\sin 2x|)$，且对任意实数 T，当 $0<T<\frac{\pi}{2}$ 时，都有 $f(|\sin 2(x+T)|)\neq f(|\sin 2x|)$，故 $y=f(|\sin 2x|)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

14. 2π. 类似例 6，过程略

15. (1) 当 $\frac{\beta}{\alpha}$ 为有理数时，存在自然数 n'、m'，使得 $T'=n'\cdot\frac{\pi}{\alpha}=m'\cdot\frac{\pi}{\beta}$，即 $\alpha T'=n'\pi$，$\beta T'=m'\pi$. 于是 $f(x+2T')=\sin^n(\alpha x+2n'\pi)\cdot\cos^m(\beta x+2m'\pi)=\sin^n\alpha x\cdot\cos^m\beta x=f(x)$，即 $f(x)$ 为周期函数，以 $2T'$ 为一个周期

若 $f(x)$ 是周期函数，则存在常数 $T(\neq 0)$，使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，即

$$\sin^n\alpha(x+T)\cos^m\beta(x+T)=\sin^n\alpha x\cos^m\beta x \quad ①$$

两边关于 x 求导，得

$$\begin{aligned}&n\alpha\sin^{n-1}\alpha(x+T)\cos\alpha(x+T)\cos^m\beta(x+T)-\beta m\sin^n\alpha(x+T)\cos^{m-1}\beta(x+T)\sin\beta(x+T)\\&=n\alpha\sin^{n-1}\alpha x\cos\alpha x\cos^m\beta x-\beta m\sin^n\alpha x\cos^{m-1}\beta x\sin\beta x.\end{aligned} \quad ②$$

② ÷ ①，得

$$n\alpha\cot\alpha(x+T)-\beta m\tan\beta(x+T)=n\alpha\cot\alpha x-\beta m\tan\beta x,$$

即 $$\alpha n[\cot\alpha(x+T)-\cot\alpha x]=\beta m[\tan\beta(x+T)-\tan\beta x].$$

变形得

$$-\frac{\alpha n\sin\alpha T}{\sin\alpha x\sin\alpha(x+T)}=\frac{\beta m\sin\beta T}{\cos\beta x\cos\beta(x+T)} \quad ③$$

在 ① 中令 $x=0$，得

$$\sin^n\alpha T\cos^m\beta T=0,\ \sin\alpha T=0 \text{ 或 } \cos\beta T=0. \quad ④$$

当 $\sin\alpha T=0$ 时，由 ③ 知 $\sin\beta T=0$.

当 $\sin\alpha T\neq 0$ 时，由 ④ 知 $\cos\beta T=0$，$\sin\beta T=\pm 1$.

在 ③ 式两边同乘 x，并令 $x\to 0$，左边极限 $=-n$，右边极限 $=m$，但 $m,n\in\mathbf{N}^*$，所以 $-n\neq m$. 这种



情况不可能出现

综上，只可能同时有 $\sin\alpha T=\sin\beta T=0$，故 $\alpha T=k_1\pi,\beta T=k_2\pi(k_1,k_2\in\mathbf{N}^*)$，于是 $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{k_2}{k_1}$ 为有理数

（ii）当 $\frac{\beta}{\alpha}$ 为有理数时，由（i）知 $\alpha T=k_1\pi,\beta T=k_2\pi$，故 $f(x)$ 的正周期的可能值为

$$T^*,2T^*,3T^*,4T^*,\cdots$$

又 $f(x+2T^*)=f(x)$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 T^* 或 $2T^*$。

第3讲　周期数列

1　周期数列的定义

【能力训练】

1　B　解法1　（不完全归纳猜想法）由 $a_1=0,a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$，可依次计算，得 $a_2=-\sqrt{3},a_3=\sqrt{3}$，$a_4=0,\cdots$，从而知3为数列$\{a_n\}$的一个周期。

于是 $a_{20}=a_{3\times6+2}=a_2=-\sqrt{3}$。

解法2　（三角代换迭代法）由递推式 $a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}a_n}$ 的结构特点，联想三角公式

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$

注意到 $\tan60^\circ=\sqrt{3}$，可作三角代换，令 $a_n=\tan x_n$，

$$a_{n+1}=\frac{\tan x_n-\tan60^\circ}{1+\tan x_n\tan60^\circ}=\tan(x_n-60^\circ).$$

同理有

$$a_{n+2}=\tan(x_n-60^\circ-60^\circ).$$

如此进行，可得

$$a_{n+3}=\tan(x_n-60^\circ-60^\circ-60^\circ)=\tan(x_n-180^\circ)=\tan x_n=a_n.$$

所以3是数列$\{a_n\}$的周期

所以 $a_{20}=a_{3\times6+2}=a_2=-\sqrt{3}$。

评注　解法2运用类比，联想三角公式，巧妙代换，求出周期，实现了难题巧解

2　C　提示　$a_1=2000,a_2=2007,a_3=7,a_4=-2000,a_5=-2007,a_6=-7,a_7=2000,a_8=2007$，由此推得，

$a_{n+6}=a_n$，$\{a_n\}$是以6为周期的数列

所以 $a_{2003}=a_5=?$



3. B　由通项式为三角式知，数列$\{a_n\}$是最小正周期为$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$的函数.

因为$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\pi+\sin\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{3}+\sin 2\pi=0$，$2008=334\times 6+4$，

所以$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}+a_{2008}=334(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 B.

4. C　$a_1=3$，$a_2=-\frac{1}{a_1+1}=-\frac{1}{4}$，$a_3=-\frac{1}{a_2+1}=-\frac{4}{3}$，$a_4=-\frac{1}{a_3+1}=3$，…

可见数列$\{a_n\}$以 3 为周期. 于是由

$$2008=669\times 3+1$$

得$a_{2008}=a_1=3$，故选 C.

5. A　因为$a_1=0$，$a_2=\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$，$a_3=\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3})+\sqrt{6}}{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}=0$，$a_4=-\sqrt{3}$.

因此，数列$\{a_n\}$中的奇数项都为 0，偶数项都为$-\sqrt{3}$，所以a[illegible]$=0$，选 A.

6. B　因为$a_1=\frac{6}{7}$，$a_2=2\times\frac{6}{7}-1=\frac{5}{7}$，$a_3=2\times\frac{5}{7}-1=\frac{3}{7}$，$a_4=2\times a_3=\frac{6}{7}$，$a_5=\frac{5}{7}$，$a_6=\frac{3}{7}$，…

说明数列$\{a_n\}$以 3 为周期，而$23=3\times 7+2$，所以$a_{23}=a_2=\frac{5}{7}$，选 B.

7. 3　由$x_1=1$，$x_2=2$，得

$$x_3=\frac{2^2-7}{1}=-3,$$

$$x_4=\frac{(-3)^2-7}{2}=1,$$

$$x_5=\frac{1-7}{-3}=2$$

……

可见$\{x_n\}$是以 3 为周期的周期数列.

8. （反复迭代消元法）

因为$a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，　①

所以$a_{n+2}=a_{n+1}+a_{n+3}$.　②

① + ②得

$a_{n+3}=-a_n$，

所以$a_{n+6}=-a_{n+3}=a_n$.

所以 6 是数列$\{a_n\}$的周期. 于是

$a_{1994}=a_{6\times 332+2}=a_2=56$

9. 令$n=0$，则$a_1=f(a_0)=5$，令$n=1$，则$a_2=f(a_1)=f(5)=2$，令$n=2$，则$a_3=f(a_2)=f(2)=$[illegible]，



令 $n=3$,则 $a_4=f(a_3)=f(1)=4$. 令 $n=4$,则 $a_5=f(a_4)=f(4)=5$. 令 $n=5$,则 $a_6=f(a_5)=f(5)=2$,……,所以 $a_{2008}=a_{501\times4+4}=a_4=4$.

10. $503\sqrt{3}$　令 $a_1=\tan\alpha$,则 $a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$$a_3=\frac{1+a_2}{1-a_2}=\frac{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\tan\left(2\times\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

……

所以 $a_{n-1}=\tan\left[(n-2)\times\frac{\pi}{4}+\alpha\right]$,于是 $a_n=\frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}=\tan\left[(n-1)\frac{\pi}{4}+\alpha\right]$

不难用归纳法证明数列的通项为:$a_n=\tan\left(\frac{\pi}{4}n-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$,且以 4 为周期. 而 1,5,9,…,2009 是以 4 为公差的等差数列.

所以 $a_1=a_5=a_9=\cdots=a_{2009}$. 由 $2009=1+(n-1)\times4$ 得总项数为 503 项,

所以 $a_1+a_5+a_9+\cdots+a_{2009}=503\times a_1=503\sqrt{3}$

11. 由 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n-1}{a_n+\sqrt{3}}$,得

$$a_2=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}+4}{2}=2-\sqrt{3},$$

$$a_3=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})-1}{(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-4}{2}=-2+\sqrt{3},$$

$$a_4=\frac{\sqrt{3}(-2+\sqrt{3})-1}{(-2+\sqrt{3})+\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-2}=-1,$$

$$a_5=\frac{-\sqrt{3}-1}{-1+\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}+4}{2}=-2-\sqrt{3},$$

$$a_6=\frac{\sqrt{3}(-2-\sqrt{3})-1}{(-2-\sqrt{3})+\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}-4}{-2}=2+\sqrt{3},$$

$$a_7=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})-1}{(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+2}=1,$$

故数列$\{a_n\}$是周期 $T=6$ 的数列.

又　$2004\div6=334$,

所以　$a_{2004}=a_6=2+\sqrt{3}$

另解　令 $a_n=\tan\theta_n$, $-\frac{\pi}{2}<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$,由三角公式,得

$$\tan\theta_{n+1}=a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n-1}{a_n+\sqrt{3}}=\frac{a_n-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{a_n}{\sqrt{3}}}=\frac{\tan\theta_n-\tan30^\circ}{1+\tan\theta_n\cdot\tan30^\circ}=\tan(\theta_n-30^\circ),$$



又 $-\frac{\pi}{2}<\theta_n<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\theta_{n+1}=\theta_n-30^\circ, n=1,2,3,\cdots$

故$\{\theta_n\}$是公差为-30°的等差数列，其中$\theta_1=\arctan 1=45^\circ$，

因此，$\theta_n=45^\circ-(n-1)\times 30^\circ, n=1,2,3,\cdots$

从而 有 $\theta_{2004}=45^\circ-2003\times 30^\circ=45^\circ-167\times 360^\circ+30^\circ=75^\circ+167\times 360^\circ$，

$$a_{2004}=\tan\theta_{2004}=\tan 75^\circ=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 30^\circ}=2+\sqrt{3}.$$

12. （迭代消元法）由题中给出的数列递推式，注意到迭代，不难看到$\{a_n\}$是周期数列

易求得，$a_3=3$

又 $a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$， ①

$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$， ②

② − ①得

$a_{n+3}-a_n=a_{n+1}a_{n+2}(a_{n+3}-a_n)$

即$(a_{n+3}-a_n)(a_{n+1}a_{n+2}-1)=0$

因为 $a_{n+1}a_{n+2}\neq 1$，

所以 $a_{n+3}=a_n$

可知 3 是 $\{a_n\}$的周期

因为 $a_1+a_2+a_3=6, 1999\equiv 1(\mathrm{mod}3)$，

所以 $S_{1999}=\sum_{i=1}^{1999}a_i=6\times 666+1=3997.$

13. 证明 因为 $a_1,a_2,\cdots,a_{2001},a_{2002}$中至少有两个相等，

设 $a_i=a_j(j>i)$，则对任意的 $m\in\mathbf{N}^*$，$a_{i+m}=a_{j+m}$，

所以$\{a_n\}$是周期数列，设 $n\geq N_0$ 时，$a_{n+T}=a_n(T=j-i)$，$a_{n+mT}=a_n$，

令 $k=mT(\geq N_0)$，则 $a_{2k}=a_k$

14. 若 $a_n\equiv 0$，则结论成立 当 $a_n\not\equiv 0$ 时，a_n 不恒为正数（否则 $a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)-a_{n+1}=-a_n<0$，矛盾），也不恒为负数（否则 $a_{n+2}=|a_{n+1}|-a_n>0$） 因此，不妨设

$a_N=-a, a_{N+1}=b$，

其中 $a,b\geq 0$，a,b 不全为零 于是

$a_{N+2}=|a_{N+1}|-a_N=b+a$，

$a_{N+3}=|a_{N+2}|-a_{N+1}=a$，

$a_{N+4}=|a_{N+3}|-a_{N+2}=-b$，

$a_{N+5}=|a_{N+4}|-a_{N+3}=b-a$

（1）若 $b<a$，则

$a_{N+6}=|a_{N+5}|-a_{N+4}=a$，

$a_{N+7}=|a_{N+6}|-a_{N+5}=2a-b$，

$a_{N+8}=|a_{N+7}|-a_{N+6}=a-b$，



$a_{N+9}=|a_{N+8}|-a_{N+7}=a$，

$a_{N+10}=|a_{N+9}|-a_{N+8}=b$.

(2) 若 $b\geqslant a$，则

$a_{N+6}=|a_{N+5}|-a_{N+4}=2b-a$，

$a_{N+7}=|a_{N+6}|-a_{N+5}=b$，

$a_{N+8}=a_{N+7}-a_{N+6}=a-b$，

$a_{N+9}=|a_{N+8}|-a_{N+7}=a$，

$a_{N+10}=|a_{N+9}|-a_{N+8}=b$.

所以，总有

$a_{N+9}=a_N, a_{N+10}=a_{N+1}$.

利用递推式便可知，对一切 $n\geqslant N$，都有

$a_{n+9}=a_n$.

15　若 a_n 是周期数列，则存在正整数 p，对任意正整数 k，n，有

$a_n=a_{n+kp}$.

即　$[x^{n+1}]-x[x^n]=[x^{n+kp+1}]-x[x^{n+kp}]$，

$x([x^{n+kp}]-[x^n])=[x^{n+kp+1}]-[x^{n+1}]$.

对于足够大的 k，有 $[x^{n+kp}]-[x^n]>0$，因而 $x=\dfrac{[x^{n+kp+1}]-[x^{n+1}]}{[x^{n+kp}]-[x^n]}$ 总有理数.

记 $x=\dfrac{V}{U}$（其中 $U>1$，$(U,V)=1$），$b_n=x^n-[x^n]$，则 $0<b_n<1(n\geqslant1)$，且 b_n 是分母为 U^n 的既约分数，$b_{n+1}\neq b_n$. 又由 $a_n=[x^{n+1}]-x[x^n]=x^{n+1}-b_{n+1}-x(x^n-b_n)=b_nx-b_{n+1}$，及 $a_{n+p}=a_n$，得 $b_{n+p}x-b_{n+p+1}=b_nx-b_{n+1}$，即 $b_{n+p+1}-b_{n+1}=x(b_{n+p}-b_n)$，对一切正整数 n 都成立，从而

$b_{p+2}-b_2=x(b_{p+1}-b_1)$，

$b_{p+3}-b_3=x(b_{p+2}-b_2)=x^2(b_{p+1}-b_1)$，…

所以，$x^n|b_{p+1}-b_1|=|b_{p+n+1}-b_{n+1}|<1$ 对一切正整数 n 都成立. 但 $x>1$，且易知 $b_{p+1}\neq b_1$，从而当 $n\to+\infty$ 时，$x^n|b_{p+1}-b_1|\to+\infty$ 矛盾.

2　某些特殊数列的周期性

【能力训练】

1. C　$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，

$f_2(x)=f(f_1(x))=-\dfrac{1}{x}$，

$f_3(x)=f(f_2(x))=\dfrac{1+x}{1-x}$，

$f_4(x)=f(f_3(x))=x$，

所以有 $f_{4k+1}(x)=f_1(x)$，$f_{4k+2}(x)=f_2(x)$，…$(k=0,1,2,\cdots)$

所以 $f_{1999}(x)=f_{4k+3}(x)=f_3(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$. 故选 C.



另解　由于欲求函数 $f_{2009}(x)$ 恒等于某个选择支中给出的答案，可取特殊值代入检验，如取 $x=2$，下略

2. D　具体计算开始几个 f 的值：$f(1)=9$，

$f(f(1))=f(9)=5$，$f[f(f(1))]=f(5)=7$，

$f_4(1)=f(7)=6$，$f_5(1)=f(6)=3$，

$f_6(1)=f(3)=8$，$f_7(1)=f(8)=4$，

$f_8(1)=f(4)=2$，$f_9(1)=f(2)=1$

即 9 个 f 后出现循环

所以 $f_{2008}(1)=f_{9\times 223+1}(1)=f_7(1)=4$，故选 D.

3. B　依条件判出白蚁的路线 $AA_1\to A_1D_1\to D_1C_1\to C_1C\to CB\to BA\to AA_1\to\cdots$，立即可以发现白蚁走完 6 段后又回到了 A 点．可验证知，黑白 2 蚁走完 6 段后必回到起点，可以判断每 6 段是一个周期

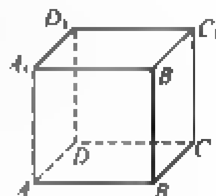


图 3-1

$2008=6\times 334+4$，因此原问题就转化为考虑黑白 2 蚁走完 4 段后的位置，不难计算出在走完 4 段后黑蚁在 D_1 点，白蚁在 C 点，故所求距离是 $\sqrt{2}$．选 B.

4. C　由已知得 $f(x)=\dfrac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}$，

所以 $f(x+1)=\dfrac{1+f(x+3)}{1-f(x+3)}$，

由 $f(x-1)=\dfrac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)}$ 得

$f(x+1)=\dfrac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}$，

所以 $\dfrac{1+f(x+3)}{1-f(x+3)}=\dfrac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}$，

所以 $f(x-1)\cdot f(x+3)=-1$，

同理 $f(x+3)\cdot f(x+7)=-1$，

所以 $f(x-1)=f(x+7)$，

即 $f(x)=f(x+8)$，

故 $f(x)$ 是以 8 为周期的函数

又 $f(1)\cdot f(5)=f(2)\cdot f(6)=f(3)\cdot f(7)=f(4)\cdot f(8)=-1$，

所以 $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)\cdot f(6)\cdot f(7)\cdot f(8)=1$

所以原式 $=1+2008=2009$，故选 C

5. C　计算 $f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{7}{10}$，$f_2\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{3}{5}$，$f_3\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$，$f_4\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{2}{5}$，$f_5\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{9}{10}$，$f_6\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$，$f_7\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{7}{10}$，

可知 $f_n\left(\dfrac{1}{5}\right)$ 是最小正周期为 6 的函数列，即得 $f_{n+6}\left(\dfrac{1}{5}\right)=f_n\left(\dfrac{1}{5}\right)$，所以 $f_{2007}\left(\dfrac{1}{5}\right)=f_3\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$，故选 C



6. C　记 $N_k=2007^{2007^{\cdots^{2007}}}$（$k$ 重），题目要求 N_{2007} 的末两位数.

$N_{2007}=2007^{N_{2006}}=(2000+7)^{N_{2006}}=2000\times M+7^{N_{2006}}$

其中 M 为正整数. 由此可得 N_{2007} 的末两位数与 $7^{N_{2006}}$ 的末两位数字相同. 首先来观察 7^n 的末两位数字的变化规律.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	
7^n 的末两位数字	49	43	01	07	49	43	01	07	…

7^n 的末两位数字的变化是以 4 为周期的规律循环出现.

$N_{2006}=(2007)^{N_{2005}}=(502\times4-1)^{N_{2005}}$，（$N_{2005}$ 为奇整数）

$=4M_1-1$，（M_1 为正整数）

$=4(M_1-1)+3$

因此，$7^{N_{2006}}=7^{4(M_1-1)+3}$ 与 7^3 的末两位数字相同，为 43. 故选 C.

7. 命题中引入"复制"，将计算机操作中的一个重要功能与数学中的一个重要概念"周期"紧密联系在一起. 题意是 2008 个圆按上述圆的"片段""周期性"变化着排列，而每一个"片段"，7 个圆中有 6 个空心圆，2008 个圆中共有 71 个"片段"，外加前 10 个圆，因此共有 $71\times6+3=447$ 个空心圆.

8. 设想在地面上建立一个直角坐标系，使得出发点 P 恰好为坐标原点，并设 A、B、C 三点的坐标分别为 (a_1,a_2)、(b_1,b_2)、(c_1,c_2). 由于 P 点坐标为 $(0,0)$，根据对称跳的定义，点 P_1 的坐标为 $(2a_1,2a_2)$.

设 $P_2(x_2,y_2)$，因 B 是 P_1P_2 的中点，所以 $b_1=\frac{2a_1+x_2}{2}$，$b_2=\frac{2a_2+y_2}{2}$.

所以 $x_2=2b_1-2a_1$，$y_2=2b_2-2a_2$.

设 $P_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,\cdots,6$.

由题意，有 $x_3=2c_1-x_2=2(c_1-b_1+a_1)$，

$x_4=2a_1-x_3=2(b_1-c_1)$，

$x_5=2b_1-x_4=2c_1$，

$x_6=2c_1-x_5=0$.

同理可得 $y_6=0$.

这就表明点 P_6 与点 P 重合.

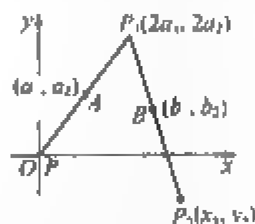


图 3-2

因此，经过关于 A、B、C 的 6 次对称跳之后，青蛙又回到了原点，即这样的对称跳以 6 为周期.

由于 $2009=3\times668+5$，所以经过 2009 步对称跳，实际上相当于只作了 5 次对称跳，或者说只差一步就跳回原地，即 $P_{2009}=P_5$.

而 P_5 是点 P 关于 C 的对称点，因此 P_{2009} 到 P 的距离 $=P_5$ 到 P 的距离 $=2\times0.27=0.54=54$（厘米）.

9. 由题意知，对任意 n，$f(n)=k$ 是一个定义在非负整数集，取值在 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 上的函数.

设 $f_{(2)}(n)=f(f(n))$，$f_{(3)}(n)=f(f(f(n)))$，$f_{(k)}(n)$ 表示 f 的 k 次复合.

则 $f_{(2)}(n)$ 是定义在 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 在 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 内取值的函数.



依次取值情况可列表如下：

$f_{(n)}(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_{(2)}$	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
$f_{(3)}$	1	1	5	1	9	3	4	2	9	1
$f_{(4)}$	1	1	9	1	3	1	5	4	3	1
$f_{(5)}$	1	1	3	1	1	1	9	5	1	1
$f_{(6)}$	1	1	1	1	1	1	3	9	1	1
$f_{(7)}$	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1
$f_{(8)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_{(9)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_{(10)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

于是对任意非负整数 n 均有：

$F(n)=\underbrace{f\ f\ f\ f\cdots f}_{n+1}(f(n))\cdots)))=1$

由于 $f(1990)+f(5)+f(13)$ 是非负整数，所以

$F[f(1990)+f(5)+f(13)]=1$.

10．初看条件与求值问题无联系，无从下笔，联想到 90 与 1000 的关系，需设辅助函数探讨规律，运用函数周期性求解.

记 $f_n(n)=\underbrace{f(f\cdots f}_{n个}(n))$

因为 $90+7\times130=1000$,

所以 $f(90)=f_2(97)=\cdots=f_{131}(1000)$

又因为 $f(1000)=997$,

所以 $f(997)=f_2(1004)=f(1001)=998$,

$f(998)=f_2(1005)=f(1002)=999$,

$f(999)=f_2(1006)=f(1003)=1000$.

所以 $f_n(1000)$ 是以 4 为周期的函数

因为 $131=4\times32+3$,

所以 $f(90)=f_{131}(1000)=f_3(1000)=999$

11．设数列 $\{x_n\}$ 的周期为 T，$T\neq1$，$T\geq2$. 若 $T=2$，则 $x_3=|a-1|=1$，得 $a=0$ 或 2

由 $x_4=|x_3-x_2|=|1-a|=a$，得 $a=\frac{1}{2}$，与 $a=0$ 或 2 矛盾，故 $T\geq3$



$T=3$ 时，由 $x_4=||a-1|-a|=1$，得 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$。由 $x_5=|1-|a-1||=a$，得 $0\leqslant a\leqslant 1$

故 $a=0$ 或 1 此时，数列 $\{x_n\}$ 分别为 $1,0,1,1,0,1,\cdots$ 或 $1,1,0,1,1,0,\cdots$，连续 3 项之和为 2

故 $S_{2008}=2\times 669+1=1339$.

说明 此题采用逐个验证的方法证明数列 $\{x_n\}$ 的最小正周期为 3，这种逐步调整的方法也是竞赛中常用的解题方法，有利于培养思维的批判性和缜密性

12. 可以验证 $f(1)=1,f(2)=1,f(3)=2$.

设 $n\geqslant 4$，则一定有 $a_1=1,a_2=2$ 或 3

对于 $a_2=2$，排列数是 $f(n-1)$，这是因为通过删除第一项，且以后的所有项都减 1，我们可以建立一一对应的数列

对于 $a_2=3$，若有 $a_3=2$，则 $a_4=4$，这样的排列数为 $f(n-3)$。

若 $a_3\neq 2$，则 2 一定在 4 后面，由此得出所有奇数顺序排列的后面是所有偶数的倒序排列

因此，$f(n)=f(n-1)+f(n-3)+1$

设 $r(n)$ 是 $f(n)$ 除以 3 的余数，则 $r(1)=r(2)=1,r(3)=2$；当 $n\geqslant 4$ 时，

$r(n)\equiv[r(n-1)+r(n-3)+1]\pmod 3$

由此得知 $r(n)$ 构成周期为 8 的数列：$1,1,2,1,0,0,2,0,\cdots$

因为 $2008\equiv 0\pmod 8$，所以 $r(2008)=0$，即 $f(2008)$ 能被 3 整除

13. 先求出最初的几个 a_n，

$a_1=1$

由于 $1+2=3\times 1$，则 $a_2\neq 2,a_2=3,a_3=4$，

由于 $4+5=3+6=3\times 3$，则 $a_4\neq 5,a_4\neq 6,a_4=7$

由于 $1+8=3\times 3,3+9=3\times 4$，则 $a_5\neq 8,a_5\neq 9,a_5=10$.

由于 $1+11=3\times 4$，则 $a_6\neq 11,a_6=12,a_7=13$.

由于 $7+14=3\times 7,15+15=3\times 10$，则 $a_8\neq 14,a_8\neq 15,a_8=16$.

由于 $13+17=3\times 10,18+3=3\times 7$，则 $a_9\neq 17,a_9\neq 18,a_9=19$.

由于 $1+20=3\times 7$，则 $a_{10}\neq 20,a_{10}=21,a_{11}=22$

由于 $7+23=3\times 10,24+24=3\times 16$，则 $a_{12}\neq 23,a_{12}\neq 24,a_{12}=25$.

到此为止，得到 a_n 前 12 个值，且列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	3	4	7	10	12	13	16	19	21	22	25

若将每四项看成一组，则每组中的项可以从其前面的一组中的每一项加 9 得到 下面验证 a_n 满足下列公式

$a_{4r+1}=9r+1$，$a_{4r+2}=9r+3$，

$a_{4r+3}=9r+4$，$a_{4r+4}=9r+7$

其中 $r=0,1,2,\cdots$

当 $r=0,1,2$ 时结论成立

假设对 $r=0,1,\cdots,m(m\geqslant 2)$ 结论成立，则 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+4}$ 中没有一项模 3 余 2，且在区间 $[1,9m+7]$ 中，所有模 3 余 1 的数都出现在如上的数列中。



因为$(9m+8)+4=3(3m+4)$，而$3m+4\equiv1(\bmod 3)$在如上的数列中，所以$a_{4m+5}\neq9m+8$．类似地，因为$(9m+9)+3=3(3m+4)$，所以$a_{4m+5}\neq9m+9$．实际上，$a_{4m+5}=9m+10$．(因为若$(9m+10)+y=3z$，则$y\equiv2(\bmod 3)$，而y不在如上的数列中，矛盾)

因为$(9m+11)+1=3(3m+4)$，所以$a_{4m+6}\neq9m+11$．实际上，$a_{4m+6}=9m+12$．(因为若$(9m+12)+y=3z$，则$y\equiv0(\bmod 3)$，故$y=9r+3$，而$(9m+12)+(9r+3)=3(3m+3r+5)$，但$3m+3r+5\equiv2(\bmod 3)$不在如上的数列中，矛盾．)

因为在如上数列中没有$y\equiv2(\bmod 3)$，所以$a_{4m+7}=9m+13$．

因为$(9m+14)+7=3(3m+7)$，而$3m+7\equiv1(\bmod 3)$在如上数列中，所以$a_{4m+8}\neq9m+14$．类似地，因为$(9m+15)+(9m+15)=3(6m+10)$，而$6m+10\equiv1(\bmod 3)$在如上数列中，所以$a_{4m+8}\neq9m+15$．

最后，因为在如上数列中没有$y\equiv2(\bmod 3)$，所以$a_{4m+8}=9m+16$．

由数学归纳法，关于a_n的公式成立．

由于$2006=4\times501+2$，所以$a_{2006}=9\times501+3=4512$．

14．(1) ① 当$0\leqslant x\leqslant1$时，由$2(1-x)\leqslant x$，得$x\geqslant\frac{2}{3}$，故$\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant1$．

② 当$1<x\leqslant2$时，$x-1\leqslant x$恒成立，所以$1<x\leqslant2$．

综合①，②得原不等式的解集是$\left\{x\,\middle|\,\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant2\right\}$．

(2) 因为$f(0)=2$，$f(1)=0$，$f(2)=1$，所以当$x=0$时，$f_3(0)=f\{f[f(0)]\}=f\{f[2]\}=f(1)=0$；

当$x=1$时，$f_3(1)=f\{f[f(1)]\}=f\{f[0]\}=f(2)=1$；

当$x=2$时，$f_3(2)=f\{f[f(2)]\}=f\{f[1]\}=f(0)=2$．

故对任意$x\in A$，恒有$f_3(x)=x$．

(3) 因$f\left(\frac{8}{9}\right)=2\left(1-\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{9}$，

$f_2\left(\frac{8}{9}\right)=f\left(f\left(\frac{8}{9}\right)\right)=f\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{14}{9}$，

$f_3\left(\frac{8}{9}\right)=f\left(f\left(f\left(\frac{8}{9}\right)\right)\right)=f\left(\frac{14}{9}\right)=\frac{14}{9}-1=\frac{5}{9}$，

$f_4\left(\frac{8}{9}\right)=f\left(f\left(f\left(f\left(\frac{8}{9}\right)\right)\right)\right)=f\left(\frac{5}{9}\right)=2\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{8}{9}$，

……

一般地，$f_{4k+r}\left(\frac{8}{9}\right)=f_r\left(\frac{8}{9}\right)(k,r\in\mathbf{N})$．

所以$f_n\left(\frac{8}{9}\right)$以4为周期．

故$f_{2006}\left(\frac{8}{9}\right)=f_{4\times501+2}\left(\frac{8}{9}\right)=f_2\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{14}{9}$．

(4) ① 分析(1)的解答可知，对自变量$\frac{2}{3}$，有

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}，$$



所以 $f_n\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

故 $f_n\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$，说明 $\frac{2}{3}$ 是 B 的元素；

② 由(2)的解答分析知，对自变量 0，1，2，恒有，$f(x)=x$，所以 $f_n(x)=f_{n+1}(x)=x$ 故 0，1，2 也是 B 的元素；

③ 由(3)的解答分析知，对自变量 $\frac{8}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{14}{9}$，$\frac{5}{9}$，$f_n(x)=f_{n+1}(x)=x$，

所以 $\frac{8}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{9}$ 也是 B 的元素

所以集合 B 中至少含有 $\frac{2}{3}$，0，1，2，$\frac{8}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{14}{9}$，$\frac{5}{9}$ 这 8 个元素.

说明　本题中的条件或结论未明确给定，需要根据试题的条件提出可能存在的结论，其结论可能是开放的，即正确答案不止一个，也没要求找出所有可能的答案．如本题第(4)问，结论不唯一，除这些答案外，还可能有其他的，但是只要求找足 8 个就够了.

15　设 r_i 是 x_i 模 m 的余数，在数列中按照连续的 m 项分成块，则余数最多有 m^m 种情况出现．由抽屉原则，有一种类型的情况会重复出现．因为定义的递推式可以向后递推，也可以向前递推，所以，数列 $\{r_i\}$ 是周期数列．

由已知条件可得向前的递推公式为

$$x_i = x_{i+m} - \sum_{j=1}^{m-1} x_{i+j},$$

由其中的 m 项组成的余数分别为 $r_0=1$，$r_1=2$，…，$r_{m-1}=2^{m-1}$，求这 m 项前面的 m 项模 m 的余数，由向前的递推公式可得，前 m 项模 m 的余数分别为 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{m-1},1$．结合余数数列的周期性，得 $k\geqslant m-1$.

另一方面，若在余数数列 $\{r_i\}$ 中有连续的 m 项均为 0，则由向前的递推公式和向后的递推公式可得，对于所有的 $i\geqslant 0$，均有 $r_i=0$，矛盾．

所以 k 的最大值为 $m-1$.

第 4 讲　函数周期性的综合应用

【能力训练】

1．D　因为 $y=f(2x)$ 关于 $x=\frac{a}{2}$ 对称，所以 $f(a+2x)=f(a-2x)$

所以 $f(2a-2x)=f[a+(a-2x)]=f[a-(a-2x)]=f(2x)$.

同理，$f(2b-2x)=f(2x)$.

所以 $f(2b-2x)=f(2x)$.

所以 $f(2b-2a+2x)=f[2b-(2a-2x)]=f(2a-2x)=f(2x)$

所以 $f(2x)$ 的一个周期为 $2b-2a$.

故知 $f(x)$ 的一个周期为 $4(b-a)$，选项为 D.

说明　考察函数的对称性及周期性，类比三角函数中的周期变换和对称性的解题规则处理即可．若



函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称($a\neq b$)，则这个函数是周期函数，其周期为 $2(b-a)$

2. D　从特殊出发　$f(2006)=40$，$f_2(2006)=f(40)=16$。

将 $f(2006)=40$ 记作 $2006\to 40$，则

$2006\to 40\to 16\to 37\to 58\to 89\to 145\to 42\to 20\to 4\to 16\to\cdots$

从16开始，$f(n)$是周期为8的周期数列，故

$f_{2006}(2006)=f_{2004}(16)=f_{8\times 250+4}(16)=f_4(16)=145$，故选 D.

说明　事实上，任给一个正整数 n(十进制)，其各位上数字的平方之和，按照题设要求，最终要么得到周期为8的周期数列，要么得到1，1，1…

3. A　将题设的方程 $\cos x=x+\sin x$，化为 $-x=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 它的图像大致如图4－1所示，

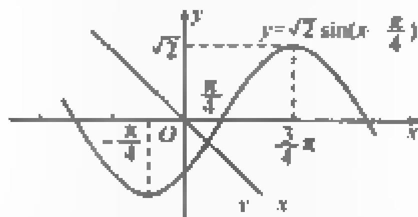


图4－1

由图4－1不难看出，直线 $y=-x$ 与正弦曲线 $y=\sin x-\cos x$ 只有一个交点，所以选 A.

4. B　b 是 y 的一个周期，故 $t\le b$. 若 $t<a$，则由 $y=y_1+y_2$ 可得 $b=a$，矛盾. 故"$t=a$"和"$t>b$"不可能. 下面的例子表明另外的三种情形都可能出现：取 $y=\sin x+\sin\frac{2x}{3}$，则 $b=6\pi$.

(1) 令 $y_1=-\sin\frac{2x}{3}$，此时 $a=3\pi$，$y_2=\sin x$，$t=2\pi$，$t<a$；

(2) 令 $y_1=-\sin x$，此时 $a=2\pi$，$y_2=\sin\frac{2x}{3}$，$t=3\pi$，$a<t<b$；

(3) 令 $y_1=\sin x$，此时 $a=2\pi$，$y_2=2\sin x+\sin\frac{2x}{3}$，$t=6\pi$，$t=b$.

5. D　因为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的最小正周期为 T，且 $T\in\left(\frac{1}{100},\frac{1}{50}\right)$

又因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，

所以 $\frac{\omega}{2\pi}\in(50,100)$，

所以 $\omega\in(100\pi,200\pi)$

所以 $315\leq\omega\leq 628$ 且 $\omega\in\mathbf{N}^*$

所以 ω 可取值的集合中元素的数目为 $628-315+1=314$ 故选 D.

6. A　因为 $f(x)$是奇函数，其图像关于原点对称，故只需圆 $x^2+y^2=R^2$ 过 $f(x)$的一个最高点即可. 令 $\frac{\pi x}{R}=\frac{\pi}{2}$，解得 $f(x)$的离原点最近的最高点为 $P\left(\frac{R}{2},2\sqrt{3}\right)$ 由题意



$$\left(\frac{R}{2}\right)^2+(2\sqrt{3})^2=R^2,R=4.$$

故 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{R}}=8$. 故选 A.

7. $2+\pi$ 要判断所给函数的性质，首先要化为最简式. 对于 $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 好像要用积化和差公式，其实发现 $x+\frac{\pi}{4}$ 与 $\frac{\pi}{4}-x$ 的互余关系，可用诱导公式化简.

由诱导公式，得 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. 因此，

$$y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sqrt{3}\sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sqrt{3}\sin 2x$$

$$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

所以函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$ 的值域是 $[-2,2]$，最小正周期是 π.

所以函数最大值和最小正周期之和为 $2+\pi$.

8. $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 当 $x\in(4k-2,4k+2)$ 时，由 $4k-2<x<4k+2$，得 $-2<x-4k<2$，而 $x\in(-2,2)$ 时，$f(x)=-x^2+1$，故 $f(x)=f(x-4k)=-(x-4k)^2+1(k\in\mathbf{Z})$ 即为所求.

9. $\sqrt{2}$ 由 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right|+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right|$

$$=\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|$$

$$=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

知 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 成轴对称图形.

又易知 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，则只需考虑 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 的情形.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，

$$f(x)=\sin x+\sin^4 2x+\cos x=\sin^4 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

因 $\sin^4 2x$ 和 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上都是增函数，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数. 故

$$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f(0)=\sqrt{2}.$$

10. 由 $f(x+1)=f(x-1)$，得 $f(x+2)=f(x)$，则 2 是 $f(x)$ 的一个周期. 又 $f(-x)=f(x)$，有 $f(x+2)=f(-x)$，知 $f(x)$ 图像的对称轴是 $x=1$.

而 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=\log_a x$，那么当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，有 $1\leqslant x+2\leqslant 2$.

则 $f(x+2)=\log_a(x+2)$



而 $f(x+2)=f(x)$，

故 $f(x)=\log_a(x+2)(-1\leqslant x\leqslant 0)$.

又当 $0<x\leqslant 1$ 时，$1\leqslant 2-x<2$，则 $f(2-x)=\log_a(2-x)$.

再根据 $f(x)$ 的对称性知 $f(2-x)=f(x)$，故 $f(x)=\log_a(2-x)(0<x\leqslant 1)$

综上所知，

$$f(x)=\begin{cases}\log_a(x+2)(-1\leqslant x\leqslant 0),\\ \log_a(-x+2)(0<x\leqslant 1)\end{cases}$$

思考　若 $x\in\mathbf{R}$ 时，本题中 $f(x)$ 的解析式是什么？（提示：再利用一个周期是 2，可得 $f(x)=\begin{cases}\log_a[2+(x+2k)],x\in(2k-1,2k],\\ \log_a[2-(x-2k)],x\in(2k,2k+1],\end{cases}k\in\mathbf{Z}$).

11　易知 $y=\sin x+\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上可达到最大值，此时

$$1\leqslant\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2},$$

$$1\leqslant\sqrt{1+|\sin 2x|}=\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$$

若 $y=x+\dfrac{1}{x}$，则有 $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$.

当 $x>1$ 时，$y'=1-\dfrac{1}{x^2}>0$，即 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增

又 $1+\dfrac{1}{1}=2<\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

所以 $y=\sin x+\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$ 的最大值是 $\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，此时 $x=\dfrac{\pi}{4}$.

下面求 $y=\sin x+\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$ 的最小值：

因为 $\sin x+\cos x$ 的最小值是 $-\sqrt{2}$，

$\dfrac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$ 的最小值是 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 又因为当 $x=\dfrac{5}{4}\pi$ 时 $\sin x+\cos x$ 可取得最小值 $-\sqrt{2}$，且 $\dfrac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$ 可取得最小值 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 所以 $y=\sin x+\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{1+|\sin 2x|}}$ 的最小值是 $-\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12　借助图像研究，应先分析 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像，如图 4-2

$f(x)$ 图像关于直线 $x=1$ 对称，即 $x\in\mathbf{R}$，$f(2-x)=f(x)$，

又 $f(6-x)=f(x)$，

所以 $f(x)=f(2-x)=f[6-(2-x)]=f(x+4)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数

因为 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=x^2-2x$，而 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称，

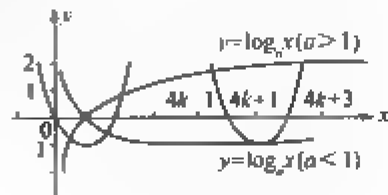


图 4-2



所以 $x\in[1,3]$时，$f(x)=x^2-2x$

又 $f(x)$以 4 为周期。

所以 $f(x)$在 $I_k=[4k-1,4k+3]$上的图像，就是把 $x\in[-1,3]$上的图像向右平移 $4k$ 个单位而得

设 $g(x)=\log_a x$。

要使 $f(x)$与 $g(x)$的图像在 $x\in I_k$ 上有两个不同交点，必须且只须：

当 $a>1$ 时，$g(4k+3)\leqslant 2$；当 $0<a<1$ 时，$g(4k+1)\geqslant -1$

即 a 的取值范围是 $(\sqrt{4k+3},+\infty)\cup\left(0,\frac{1}{4k+1}\right)$，$k\in Z$ 且 $k\geqslant 1$

13.（1）若 $\frac{\beta}{\alpha}$是有理数，则 $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{n'\pi}{n\pi}$（$n,n'\in N^*$），且 n 与 n' 互质，即 $\frac{n\pi}{\alpha}=\frac{n'\pi}{\beta}=t$，$t>0$）。

所以 $\alpha t=n\pi$，$\beta t=n'\pi$。

故 $f(x+t)=\left|\frac{\sin\beta(x+t)}{\sin\alpha(x+t)}\right|=\left|\frac{\sin(\beta x+n'\pi)}{\sin(\alpha x+n\pi)}\right|=\left|\frac{\sin\beta x}{\sin\alpha x}\right|=f(x)$，故函数 $f(x)$为周期函数，以 t 为周期

（2）若 $f(x)$是周期函数，设 $t(t>0)$是它的一个周期，则 $f(x+t)=f(x)$，即 $\left|\frac{\sin\beta(x+t)}{\sin\alpha(x+t)}\right|=\left|\frac{\sin\beta x}{\sin\alpha x}\right|$ 在定义域内都成立，即

$$|\sin\beta(x+t)\cdot\sin\alpha x|=|\sin\beta x\cdot\sin\alpha(x+t)| \qquad ①$$

对定义域内每一个 x 值均成立

若 $\frac{\alpha}{\beta}=k$（$k\in N^*$），则命题已成立；若 $\frac{\alpha}{\beta}\neq k$（$k\in N^*$），令 $x=\frac{\pi}{\beta}$ $\left(\frac{\pi}{\beta}\text{属于定义域}\right)$，由①有

$$\left|\sin(\pi+\beta t)\cdot\sin\frac{\alpha}{\beta}\pi\right|=\left|\sin\pi\cdot\sin\alpha\left(\frac{\pi}{\beta}+t\right)\right|=0.$$

即 $\sin\beta t\cdot\sin\frac{\alpha}{\beta}\pi=0$，因为 $\frac{\alpha}{\beta}\pi\neq k\pi$，（$k\in N^*$），

所以 $\sin\frac{\alpha}{\beta}\pi\neq 0$，故 $\sin\beta t=0$。

从而 $\beta t=k'\pi$（$k'\in N^*$），所以 $t=\frac{k'}{\beta}\pi$，由①有

$$|\sin(\beta x+k'\pi)\cdot\sin\alpha x|=\left|\sin\beta x\cdot\sin\left(\alpha x+\frac{\alpha}{\beta}k'\pi\right)\right|.$$

在上式中令 $x=\frac{\pi}{2\alpha}$ $\left(\frac{\pi}{2\alpha}\text{属于定义域}\right)$，则

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2\alpha}\right|=\left|\sin\frac{\beta\pi}{2\alpha}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{\beta}k'\pi\right)\right|$$

于是 $\sin\frac{\beta\pi}{2\alpha}=0$ 或 $\left|\cos\frac{\alpha}{\beta}k'\pi\right|=1$。

所以 $\frac{\beta\pi}{2\alpha}=k_1\pi$ 或 $\frac{\alpha}{\beta}k'\pi=k_2\pi$（$k_1,k_2\in N^*$）。



故 $\frac{\alpha}{\beta}$ 为有理数

综合(1)、(2)，知结论成立

14 因为 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，且 $f(x)=x-1, 2\leqslant x\leqslant 3$，

所以当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=f(x+2)=(x+2)-1=x+1$

又因为 $f(x)$ 是偶函数

所以当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=f(-x)=-x+1$，

所以当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=f(x-2)=-(x-2)+1=-x+3$.

设 A、B 的坐标分别为 (x_A, y_A)、(x_B, y_B)，$(1\leqslant x_A<x_B\leqslant 3)$，

则 $y_A=-x_A+3, y_B=x_B-1$

因为 $y_A=y_B$，

所以 $-x_A+3=x_B-1$，即 $x_B=4-x_A$，

所以 $|AB|=x_B-x_A=4-2x_A$，

设 C 点到直线 AB 的距离为 d，则

$d=a-y_1=a+x_1-3$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=(2-x_1)(a+x_1-3)$

$$=-\left(x_1-\frac{5-a}{2}\right)^2+\frac{a^2-2a+1}{4}, 1\leqslant x_1\leqslant 2$$

若 $2\leqslant a\leqslant 3$ 时，$1\leqslant\frac{5-a}{2}\leqslant\frac{3}{2}$，则当 $x_1=\frac{5-a}{2}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 有最大值，最大值 $S_{max}=\frac{a^2-2a+1}{4}$；

若 $a>3$ 时，$\frac{5-a}{2}<1$，则当 $x_1=1$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 有最大值，最大值 $S_{max}=a-2$.

15. (1) 因为 $f(\cdots)=0$，可取 x 为 $x+2$，y 为 x，得 $f(x+2)+f(x)=0$，故 $f(x+4)+f(x+2)=0$，于是 $f(x+4)=f(x)$，故 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

(2) 只要求 $f(0)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$，即可由周期性得出 $f(n)$ 的解析式. 令 $x=y=0$，得 $2f(0)=2f^2(0)$，$f(0)\neq 0$，得 $f(0)=1$，而 $f(1)=0$，故 $f(2)=-f(0)=-1$，$f(3)=-f(1)=0$

于是，当 $k\in\mathbf{N}$ 时，

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=4k,\\ 0 & n=2k+1,\\ -1 & n=4k+2\end{cases}$$

注：$f(n)$ 也可写成 $\cos\frac{n\pi}{2}, n\in\mathbf{N}$.

16 证明一个小数是有理数，只须证明这个小数的小数点后面呈周期性规律

证法 1 因为 1^2 与 3^2 的个位数字之和为 0，2^2 与 4^2 的个位数字之和为 0，6^2 与 8^2 的个位数字之和为 0，7^2 与 9^2 的个位数字之和为 0，5^2 的个位数字为 5.

所以 $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$ 的个位数字为 5.

同理 $11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$ 的个位数字为 5.



于是 $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$ 的个位数字为 0.

由此可以看出 $a_1=a_{21}, a_2=a_{22}$. ①

所以猜想 a_n 是以 20 为周期的数列，即有 $a_n=a_{n+20}$. ②

可用归纳法加以证明(略).

由上可知 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 是循环节长 20 的循环小数，亦即 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 为有理数.

证法 2　本题的实质，我们只须证明 $\{a_n\}$ 是周期数列. 显然数列 $\{n^2\}$ 的各项的末位数字构成了周期数列：1，4，9，6，5，6，9，4，1，0，1，4，9，6，5，6，9，4，1，0，…，且最小正周期为 10. 故此周期数列中任意连续的 10 项之和等于：$1+4+9+6+5+6+9+4+1+0=45$. 从而数列的任意连续 10 项之和末位数字为 5. 故对任意的自然数 n，必有 $a_{n+10+10}=a_n$，即 $a_{n+20}=a_n$. 这样本题即得到证明.

17. 因为函数 $f_1(x)=f(x)=2\left|\frac{1}{2}-x\right|$ 的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，$(x\in[0,1])$

所以 $f_2(x)=2^2\left|\frac{1}{2^2}-\left|\frac{1}{2}-x\right|\right|$ 的图像首先是关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，又当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f_2(x)=2^2\left|x-\frac{1}{4}\right|$，其图像又关于 $x=\frac{1}{4}$ 对称，于是，易知，$y=f_2(x)$ 在 $[0,1]$ 上以 $T=\frac{1}{2}$ 为周期，如图 4－3，知方程 $f_2(x)=\frac{1}{2}x$ 有 2^2 个根.

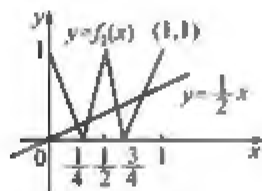


图 4－3

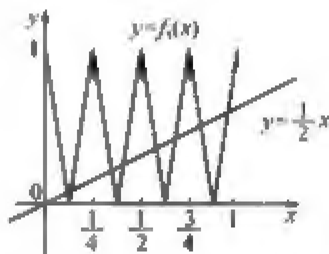


图 4－4

同样的，$y=f_3(x)$ 的图像首先关于 $x=\frac{1}{2}(x\in(0,1))$ 对称，又关于 $x=\frac{1}{4}\left(x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$ 对称，其三，还关于 $x=\frac{1}{8}$，$x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 对称，于是知 $y=f_3(x)$ 在 $[0,1]$ 上以 $T=\frac{1}{4}$ 为周期. 依上面讨论知 $y=f_3(x)$ 的图像如图 4－4，故方程 $f_3(x)=\frac{1}{2}x$ 的根的个数为 2^3 个.

一般地，函数 $y=f_n(x)$ 分别在区间 $[0,1]$，$\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$\left[0,\frac{1}{4}\right]$，…，$\left[0,\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ 上以 $x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{4}$，$x=\frac{1}{8}$，…，$x=\frac{1}{2^{n-1}}$ 为对称轴，且图像与 x 轴交点也恰好为这些对称轴与 x 轴的交点，故 $y=f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上以 $T=\frac{1}{2^{n-1}}$ 为周期，于是，根据周期性可作出 $y=f_n(x)$ 的图像(图略)，它由 2^{n-1} 个"V"字连接而成，根据图像可知方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}x$ 在 $[0,1]$ 上有 2^n 个根.



说明　有些数学问题表面看与函数性质无关，实际上它涉及一些函数图像性质，特别是周期性，而要搞清图像性质并及时抓住问题的本质就需借助函数周期性来助一臂之力。

18. (1) $\frac{1}{p}$的最小循环节的长度是满足 10^d-1 可以被 p 整除的最小整数 d，其中 $d\geqslant 1$.

设 q 是素数，$N_q=10^{2q}+10^q+1$，则 $N_q\equiv 3 \pmod 9$. 设 p_q 是$\frac{N_q}{3}$的一个素因子，则 p_q 不能被 3 整除. 因为 N_q 是 $10^{3q}-1$ 的因子，$\frac{1}{p^q}$的循环节的长度为 $3q$，所以$\frac{1}{p^q}$的最小循环节的长度是 $3q$ 的因子. 若最小循环节的长度为 q，则由 $10^q\equiv 1 \pmod{p_q}$，得 $N_q=10^{2q}+10^q+1\equiv 3\not\equiv 0 \pmod{p_q}$，矛盾. 若最小循环节的长度为 3，只能有一种情况，即 p_q 是 $10^3-1=3^3\times 37$ 的因子，即 $p_q=37$. 此时 $N_q=3\times 37\equiv 3 \pmod 4$，而 $N_q=10^{2q}+10^q+1\equiv 1 \pmod 4$，矛盾.

于是，对每个素数 q，我们能找到一个素数 p_q，使得$\frac{1}{p_q}$的小数部分的最小循环节的长度为 $3q$.

(2) 设素数 $p\in S$，$3r(p)$ 是$\frac{1}{p}$的最小循环节的长度，p 是 $10^{3r(p)}-1$ 的因子，但不是 $10^{r(p)}-1$ 的因子，所以，p 是 $N_{r(p)}=10^{2r(p)}+10^{r(p)}+1$ 的因子.

设$\frac{1}{p}=0.a_1a_2a_3\cdots$，$x_i=\frac{10^{i-1}}{p}$，$y_i=\{x_i\}=0.a_ia_{i+1}a_{i+2}\cdots$，其中 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分，则 $a_i<10y_i$，于是，

$f(k,p)=a_k+a_{k+r(p)}+a_{k+2r(p)}<10(y_k+y_{k+r(p)}+y_{k+2r(p)})$.

由于 $x_k+x_{k+r(p)}+x_{k+2r(p)}=\frac{10^{k-1}N_{r(p)}}{p}$ 是整数，所以 $y_k+y_{k+r(p)}+y_{k+2r(p)}$ 也是整数，且是小于 3 的整数，即 $y_k+y_{k+r(p)}+y_{k+2r(p)}\leqslant 2$.

从而 $f(k,p)<20$. 因此，$f(k,p)$ 的最大值不超过 19. 由于 $f(2,7)=4+8+7=19$，故所求最大值为 19.

19. 问题等价于确定正整数 n，使同余式

$$1+2+3+\cdots+x\equiv a \pmod n \quad ①$$

对 $a=0,1,2,\cdots,n-1$ 均有解(实际上等价于对任意整数 a 均有解).

取 n 的特殊值进行尝试，考察 $1+2+3+\cdots+x$ 对模 n 的余数能否取遍模 n 的一个完全剩余系.

当 $n=2$ 时，$1\equiv 1 \pmod 2$，$1+2\equiv 1 \pmod 2$，$1+2+3\equiv 0 \pmod 2$，所以 $n=2$ 满足要求.

当 $n=3$ 时，$1\equiv 1 \pmod 3$，$1+2\equiv 0 \pmod 3$，$1+2+3\equiv 0 \pmod 3$，容易看出当正整数 x 增大时，$1+2+3+\cdots+x$ 对模 3 的余数是以 1,0,0 为一个周期的周期数列，所以 $n=3$ 不满足要求.

当 $n=4$ 时，$1\equiv 1 \pmod 4$，$1+2\equiv 3 \pmod 4$，$1+2+3\equiv 2 \pmod 4$，$1+2+3+4\equiv 2 \pmod 4$，$1+2+3+4+5\equiv 3 \pmod 4$，$1+2+3+4+5+6\equiv 1 \pmod 4$，$1+2+3+4+5+6+7\equiv 0 \pmod 4$，至此可以看出 $1+2+3+\cdots+x$ 对模 4 的余数取遍一个完全剩余系 0,1,2,3，所以 $n=4$ 满足要求.

当 $n=5$ 时，$1\equiv 1 \pmod 5$，$1+2\equiv 3 \pmod 5$，$1+2+3\equiv 1 \pmod 5$，$1+2+3+4\equiv 0 \pmod 5$，$1+2+3+4+5\equiv 0 \pmod 5$，接下去的余数必然又是循环出现，所以 $n=5$ 不满足要求.

类似地可得 $n=6,7,9,10$ 不满足要求，而 $n=8$ 满足要求.



于是猜想当且仅当 n 为 2 的方幂，即 $n=2^k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，n 个学生每人都能发到糖.

接下来的问题是：如何证明这一猜想成立呢？

重新考察特殊情形的分析过程，不难发现 $n=3,5,7$ 时，$1+2+3+\cdots+x$ 对模 n 的余数是一个十分简单的循环. 于是可得如下的一个辅助猜想.

猜想 当 n 为奇质数 p 时，必存在整数 a 使(1)式无解.

下面证明这一辅助猜想成立.

考虑 $1+2+3+\cdots+x$ 的前 p 个取值

$$1,1+2,1+2+3,\cdots,1+2+\cdots+(p-1),1+2+3\cdots+(p-1)+p, \qquad ②$$

由于 p 是奇质数，可得

$$1+2+\cdots+(p-1)+p=\frac{p(p+1)}{2}\equiv 0(\bmod p).$$

所以

$$1+2+\cdots+(p-1)\equiv 1+2+\cdots+(p-1)+p\equiv 0(\bmod p).$$

所以②式中的 p 个数对模 p 的余数最多只有 $p-1$ 个不同的值，且 $1+2+3+\cdots+x$ 对模 p 的余数均是上述余数的循环，故必存在整数 a 使(1)式无解.

又当 n 含有奇质因数 p 时，如果同余式(1)对任一整数 a 均有解，则同余式

$$1+2+3+\cdots+x\equiv a(\bmod p),$$

也必对任一整数 a 均有解，而由辅助猜想知这是不可能的. 故而，当 n 含有奇质因数 p 时，同余式(1)必存在无解的情况. 因此，为使同余式①对任一整数 a 均有解，n 只可能是 2 的方幂.

下面需要证明当 $n=2^k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，同余式①确实对任一整数 a 均有解. 为此只须构造 2^k 个两两对模 2^k 不同余的整数，使 $1+2+3+\cdots+x=\frac{x(x+1)}{2}$ 能通过其中的每一个整数. 实际上，如下的 2^k 个整数便符合要求(证明略).

$$\frac{0\times 1}{2},\frac{1\times 2}{2},\frac{2\times 3}{2},\cdots,\frac{(2^k-1)\cdot 2^k}{2}.$$

说明 有时，命题的结论因不够明确而使解题无从下手，这时可通过对特殊情形的分析得到有关的猜想，使结论明确化，然后加以证明.

20. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，f 是满足条件的映射，则 f 不可能将 $k(k\geqslant 2)$ 个元素映射成一个循环圈，即不可能有 $f(a_1)=a_2,f(a_2)=a_3,\cdots,f(a_{k-1})=a_k,f(a_k)=a_1$.

事实上，若出现上述情况，则 $f(\{a_1,a_2,\cdots,a_k\})=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则 $f^{n-2}(x)$ 不可能为常数，矛盾.

另外，$f(x)$ 不可能有两个或两个以上的不动点. 事实上，若 $f(a_1)=a_1,f(a_2)=a_2$，则 $f^{n-2}(x)$ 不可能为常数.

考虑序列

$$a_1,f(a_1),f^2(a_1),f^3(a_1),\cdots,f^n(a_1) \qquad ①$$

由抽屉原理，①中必有两个元素相同，但因不能出现循环的圈，故必有一个 $i(0\leqslant i\leqslant n-1)$，使得

$$f^i(a_1)=f^{i+1}(a_1)(\text{记 } f^0(a_1)=a_1).$$



从而 $f(f^r(a_1))=f^r(a_1)$.

故 $f(x)$ 至少有一个不动点.

综上知，$f(x)$ 恰有一个不动点，即存在唯一的 $x_0\in A$，使 $f(x_0)=x_0$. 不妨设 $f(a_n)=a_n$.

因为 $f^{n-3}(x)$ 不是常数，故必存在 $a_i\in A$，使 $f^{n-3}(a_i)\neq a_n$，从而 $f^j(a_i)\neq a_n$，$1\leqslant j\leqslant n-3$.

又 $a_i, f(a_i), f^2(a_i), \cdots, f^{n-3}(a_i)$ 必互不相同，(否则会出现一个循环圈或一个新的不动点，矛盾)，故

$$a_i, f(a_i), f^2(a_i), \cdots, f^{n-3}(a_i), a_n \qquad ②$$

是 A 的以 a_i 开头，a_n 结尾的 $n-1$ 个元素的排列，故完成 f 可按如下方式：

从 A 中取出 $n-1$ 个元素作排列，

$$a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}, (\text{有 } C_n^{n-1}(n-1)! \text{ 种})$$

并规定 $f(a_{i_2})=a_{i_3}, \cdots, f(a_{i_{n-2}})=a_{i_{n-1}}, f(a_{i_{n-1}})=a_{i_n}, f(a_{i_n})=a_{i_n}$.

而 $f(a_{i_1})\in\{a_{i_3}, \cdots, a_{i_{n-1}}, a_{i_n}\}$ (有 $n-2$ 种).

故完成 f 的方式有

$$C_n^{n-1}(n-1)!\,(n-2)=(n-2)n! \text{ 种}.$$

但在上述计数中，对于排列

$$a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}, \cdots, a_{i_n} \text{ 规定 } f(a_{i_1})=a_{i_3},$$

与排列

$$a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_4}, \cdots, a_{i_n} \text{ 规定 } f(a_{i_2})=a_{i_3},$$

这两种不同的方式得到的是同一个映射，故这种映射被计数了两次，而这种映射共有

$$C_n^2(n-2)! = \frac{n!}{2} \text{ 个}.$$

故符合条件的映射共有

$$(n-2)n! - \frac{n!}{2} = \frac{2n-5}{2}n! \text{ 个}.$$

说明　在映射的计数问题中，要注意对两个问题的分析：(1) $f(x)$ 是否有不动点；(2) $f(x)$ 是否会出现循环圈，同时序列①也是常用的分析工具.

解答依赖于对所考虑的对象的计数或估值的问题时，除应掌握必要的计数工具如递归关系、容斥原理、组合恒等式外，还应掌握一些常用的分析问题的手段与方法.

